

Algebraische Geometrie I
Wahr oder Falsch – Alle Aufgaben

Wahr oder (im Allgemeinen) falsch? Soweit nicht anders angegeben bezeichnet k einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

WOCHE 1

- (i) Unendliche Vereinigungen algebraischer Teilmengen sind algebraisch.
- (ii) Für A faktoriell ist auch $A[x]$ faktoriell.
- (iii) Für $Z_1, Z_2 \subseteq \mathbb{A}_k^2$ algebraisch gilt $I(Z_1 \cap Z_2) = I(Z_1) + I(Z_2)$.
- (iv) Für \mathfrak{p} ein Primideal gilt $\sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$.
- (v) Für k algebraisch abgeschlossen und $S \subseteq \mathbb{A}_k^n$ beliebig gilt $S = Z(I(S))$.

WOCHE 2

- (i) Sei $Z \subseteq \mathbb{A}_k^n$ algebraisch, und $D(f_i) \subseteq Z$ Standard-Offene für $i = 1, 2$, und $U = D(f_1) \cap D(f_2)$. Dann gilt $\mathcal{O}_Z(U) = \mathcal{O}_Z(Z)[f_1^{-1}, f_2^{-1}]$.
- (ii) Sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige, surjektive Abbildung von topologischen Räumen. Angenommen, X ist noethersch. Dann ist auch Y noethersch.
- (iii) Es gibt eine nicht-konstante algebraische Abbildung $\mathbb{A}_k^1 \rightarrow \mathbb{A}_k^1 \setminus \{0\}$.
- (iv) Die Abbildung $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$, $1 \mapsto 0$, $0 \mapsto 1$, $\{1, 0\} \ni x \mapsto x$ ist stetig für die Zariski-Topologie. (Bonus: Ist sie algebraisch?)
- (v) Es gibt eine algebraische Teilmenge $Z \subseteq \mathbb{A}_k^2$ sodass $\mathcal{O}_Z(Z) = k[x, y]/(x^2)$.

WOCHE 3

- (i) Die Produkttopologie auf $\mathbb{A}_k^2 = \mathbb{A}_k^1 \times \mathbb{A}_k^1$ stimmt mit der Zariskitopologie auf \mathbb{A}_k^2 überein.
- (ii) Sei $X = V(y^2 - x^2(x + 1)) \subseteq \mathbb{A}_k^2$. Dann ist $t = y/x \in k[X] \subseteq k(X)$.
- (iii) Sei $I \in k[x_1, \dots, x_n]$. Dann gilt $\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{m} \supseteq I} \mathfrak{m}$.
- (iv) Die Abbildung $\mathbb{A}_k^1 \rightarrow V(y - x^2) \subseteq \mathbb{A}_k^2$, gegeben durch $t \mapsto (t, t^2)$ ist ein Isomorphismus von algebraischen Mengen.

- (v) Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung von algebraischen Teilmengen, sodass $f^*: k[Y] \rightarrow k[X]$ injektiv ist. Dann ist $\text{Bild}(f) \subseteq Y$ eine dichte Teilmenge.

WOCHE 4

- (i) Sei (I, \geq) eine endliche, total geordnete Menge, mit maximalem Element i_∞ . Dann gilt für jeden Funktor $F: I \rightarrow \mathcal{C}$, dass $\text{colim}_I F(i) = F(i_\infty)$.
- (ii) Sei \mathcal{C} die Kategorie der (kommutativen) Ringe. Dann ist der Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$, gegeben durch

$$F(A) = \{a \in A \mid a \text{ ist nilpotent}\}$$

darstellbar.

- (iii) Seien \mathcal{F}, \mathcal{G} Garben auf einem topologischen Raum X , und $\varphi, \psi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ Abbildungen von Garben. Angenommen, für alle $x \in X$ gilt $\varphi_x = \psi_x$ (wobei $\varphi, \psi: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ die induzierten Abbildungen sind). Dann gilt bereits $\varphi = \psi$.
- (iv) Seien \mathcal{C}, \mathcal{D} Kategorien, und $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor. Angenommen, G ist ein rechtsadjungierter Funktor. Dann ist für alle $X \in \mathcal{C}$ der Funktor

$$\text{Hom}(X, G(-)): \mathcal{D} \rightarrow \text{Set}$$

darstellbar.

- (v) Sei X ein topologischer Raum. Dann definiert die Zuordnung $U \mapsto \{f: U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt}\}$ eine Garbe auf X .

WOCHE 5

- (i) Sei (\mathcal{F}_i) ein System von Garben auf einem topologischen Raum X . Dann gilt für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ dass $(\lim \mathcal{F}_i)(U) = \lim(\mathcal{F}_i(U))$.
- (ii) Sei X ein topologischer Raum, und \mathcal{F} eine Garbe auf X . Sei \mathcal{F}' eine Unterprägarbe von X , d.h. es gibt einen Monomorphismus von Prägarben $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F}$. Dann ist \mathcal{F} automatisch eine Garbe.
- (iii) Sei $j: U \hookrightarrow X$ die Inklusion einer offenen Teilmenge. Sei \mathcal{F} eine Garbe auf X . Dann gilt für alle $x \in U$, dass $(j_*\mathcal{F})_x \cong \mathcal{F}_x$.
- (iv) Sei $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ eine Abbildung von Prägarben auf einem topologischen Raum X . Angenommen, alle induzierte Abbildungen $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ sind injektiv. Dann ist für alle $U \subseteq X$ die Abbildung $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ ebenfalls injektiv.
- (v) Sei X ein topologischer Raum, und $\mathfrak{B} = (B_i)$ eine Basis der Topologie. Sei $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ eine Abbildung von Garben auf X . Angenommen, für alle B_i ist die Abbildung $\mathcal{F}(B_i) \rightarrow \mathcal{G}(B_i)$ surjektiv. Dann ist $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$ ebenfalls surjektiv.