Prof. Dr. Jakob Stix
Ruth Wild

Wintersemester 2024/25

Algebraische Geometrie I
Wahr oder Falsch – Alle Aufgaben

Wahr oder (im Allgemeinen) falsch? Soweit nicht anders angegeben bezeichnet k einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Woche 1

(i) Unendliche Vereinigungen algebraischer Teilmengen sind algebraisch.

(ii) Für A faktoriell ist auch $A[x]$ faktoriell.

(iii) Für $Z_1, Z_2 \subseteq \mathbb{A}_k^2$ algebraisch gilt $I(Z_1 \cap Z_2) = I(Z_1) + I(Z_2)$.

(iv) Für $\mathfrak{p}$ ein Primideal gilt $\sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$.

(v) Für k algebraisch abgeschlossen und $S \subset \mathbb{A}_k^n$ beliebig gilt $S = Z(I(S))$.

Woche 2

(i) Sei $Z \subseteq \mathbb{A}_k^n$ algebraisch, und $D(f_i) \subseteq Z$ Standard-Offene für $i = 1,2$, und $U = D(f_1) \cap D(f_2)$. Dann gilt $\mathcal{O}_Z(U) = \mathcal{O}_Z(Z)[f_1^{-1}, f_2^{-1}]$.

(ii) Sei $f \colon X \to Y$ eine stetige, surjektive Abbildung von topologischen Räumen. Angenommen, X ist noethersch. Dann ist auch Y noethersch.

(iii) Es gibt eine nicht-konstante algebraische Abbildung $\mathbb{A}_k^1 \to \mathbb{A}_k^1 \setminus \{0\}$.

(iv) Die Abbildung $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 \to \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$, $1 \mapsto 0$, $0 \mapsto 1$, $\{1,0\} \not\ni x \mapsto x$ ist stetig für die Zariski-Topologie. (Bonus: Ist sie algebraisch?)

(v) Es gibt eine algebraische Teilmenge $Z \subseteq \mathbb{A}_k^2$ sodass $\mathcal{O}_Z(Z) = k[x,y]/(x^2)$.

Woche 3

(i) Die Produktopologie auf $\mathbb{A}_k^2 = \mathbb{A}_k^1 \times \mathbb{A}_k^1$ stimmt mit der Zariskitopologie auf $\mathbb{A}_k^2$ überein.

(ii) Sei $X = V(y^2 - x^2(x+1)) \subset \mathbb{A}_k^2$. Dann ist $t = y/x \in k[X] \subset k(X)$.

(iii) Sei $I \in k[x_1, \dots, x_n]$. Dann gilt $\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{m} \supseteq I} \mathfrak{m}$.

(iv) Die Abbildung $\mathbb{A}_k^1 \to V(y - x^2) \subset \mathbb{A}_k^2$, gegeben durch $t \mapsto (t, t^2)$ ist ein Isomorphismus von algebraischen Mengen.

(v) Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung von algebraischen Teilmengen, sodass $f^*\colon k[Y] \to k[X]$ injektiv ist. Dann ist $\mathrm{Bild}(f) \subseteq Y$ eine dichte Teilmenge.

Woche 4

(i) Sei $(I, \geq)$ eine endliche, total geordnete Menge, mit maximalem Element i_∞. Dann gilt für jeden Funktor $F\colon I \to \mathcal{C}$, dass $\operatorname{colim}_I F(i) = F(i_\infty)$.

(ii) Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie der (kommutativen) Ringe. Dann ist der Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$, gegeben durch

$$F(A) = \{a \in A \mid a \text{ ist nilpotent}\}$$

darstellbar.

(iii) Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ Garben auf einem topologischen Raum X, und $\varphi, \psi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ Abbildungen von Garben. Angenommen, für alle $x \in X$ gilt $\varphi_x = \psi_x$ (wobei $\varphi, \psi\colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ die induzierten Abbildungen sind). Dann gilt bereits $\varphi = \psi$.

(iv) Seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ Kategorien, und $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ein Funktor. Angenommen, G ist ein rechtsadjungierter Funktor. Dann ist für alle $X \in \mathcal{C}$ der Funktor

$$\mathrm{Hom}(X, G(-))\colon \mathcal{D} \to \mathrm{Set}$$

darstellbar.

(v) Sei X ein topologischer Raum. Dann definiert die Zuordnung $U \mapsto \{f\colon U \to \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt}\}$ eine Garbe auf X.

Woche 5

(i) Sei $(\mathcal{F}_i)$ ein System von Garben auf einem topologischen Raum X. Dann gilt für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ dass $(\lim \mathcal{F}_i)(U) = \lim(\mathcal{F}_i(U))$.

(ii) Sei X ein topologischer Raum, und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Sei $\mathcal{F}'$ eine Unterprägarbe von X, d.h. es gibt einen Monomorphismus von Prägarben $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F}$. Dann ist $\mathcal{F}$ automatisch eine Garbe.

(iii) Sei $j\colon U \hookrightarrow X$ die Inklusion einer offenen Teilmenge. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Dann gilt für alle $x \in U$, dass $(j_*\mathcal{F})_x \cong \mathcal{F}_x$.

(iv) Sei $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ eine Abbildung von Prägarben auf einem topologischen Raum X. Angenommen, alle induzierte Abbildungen $\mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ sind injektiv. Dann ist für alle $U \subseteq X$ die Abbildung $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ ebenfalls injektiv.

(v) Sei X ein topologischer Raum, und $\mathfrak{B} = (B_i)$ eine Basis der Topologie. Sei $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ eine Abbildung von Garben auf X. Angenommen, für alle B_i ist die Abbildung $\mathcal{F}(B_i) \to \mathcal{G}(B_i)$ surjektiv. Dann ist $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$ ebenfalls surjektiv.

Woche 6

(i) Sei K eine endliche Körperweiterung von $\mathbb{Q}$. Dann ist der topologische Raum $\operatorname{Spec}(\overline{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} K)$ zusammenhängend.

(ii) Sei K ein Körper und $R = K[[t]]$ der Potenzreihenring in einer Variable. Dann hat $\operatorname{Spec}(R)$ genau einen offenen und einen abgeschlossenen Punkt.

(iii) Sei K ein Körper. Dann ist $\bigsqcup_{\mathbb{N}} \operatorname{Spec}(K)$ ein affines Schema.

(iv) Sei X ein affines Schema, und $U \subsetneq X$ ein echtes Unterschema. Dann gilt $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \neq \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$.

(v) Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann ist der Funktor $f^{-1}\colon \mathrm{Sh}_{\mathrm{Ab}}(Y) \to \mathrm{Sh}_{\mathrm{Ab}}(X)$ exakt.

Woche 7

(i) Seien X, Y affine Schema über einem Basisschema S. Dann ist die kanonische Abbildung
$$|X \times_S Y| \to |X| \times_{|S|} |Y|$$
ein Homöomorphismus.

(ii) Sei X ein Schema, und seien $p_1, p_2\colon X \times X \to X$ die beiden Projektionen. Angenommen, für $a \in X \times X$ gilt $p_1(a) = p_2(a)$. Dann liegt a im topologischen Bild der Diagonale $X \to X \times X$.

(iii) Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung von Schemata, und $y \in Y$. Dann gibt es einen natürlichen Homöomorphismus $X_y := X \times_Y \operatorname{Spec}(k(y)) \to f^{-1}(y)$.

(iv) Sei $X = \operatorname{Spec}(A)$ ein affines Schema, und $x \in X$ ein Primideal. Sei $Y = \operatorname{Spec}(B)$ ein weiteres affines Schema, und $f\colon Y \to X$ eine Abbildung von affinen Schema. Dann gilt $x \in \operatorname{im}(f)$ genau dann wenn $B \otimes_A k(x) \neq 0$.