Prof. Dr. Jakob Stix
Ruth Wild

Wintersemester 2024/25

Algebraische Geometrie I
Blatt 9

Abgabe: 18. Dezember

Aufgabe 1.
Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie die alle Faserprodukte hat, und seien $X_1, X_2 \to Y$ und $Y \to Z$ Abbildungen in $\mathcal{C}$. Zeige, dass das folgende Diagramm kartesisch ist:

$$\begin{tikzcd} X_1 \times_Y X_2 \arrow[r] \arrow[d] & X_1 \times_Z X_2 \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & Y \times_Z Y \end{tikzcd}$$

Aufgabe 2.
Sei $F\colon \mathrm{Sch}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ ein Funktor.

Definition.

(i) F erfüllt die *Garbeneigenschaft für die Zariskitopologie* falls gilt: Für jedes Schema T und jede offene Überdeckung $T = \bigcup_{i \in I} U_i$ und jedes I-Tupel von Elementen $\xi_i \in F(U_i)$ so dass $\xi_i|_{U_i \cap U_j} = \xi_j|_{U_i \cap U_j}$ gibt es ein eindeutiges Element $\xi \in F(T)$ mit $\xi|_{U_i} = \xi_i \in F(U_i)$.

(ii) Ein *Unterfunktor* H von F ist eine Zuordnung $T \mapsto H(T) \subseteq F(T)$ für jedes Schema T, sodass für alle Abbildung $f\colon T' \to T$ gilt $F(H(T)) \subseteq H(T')$.

(iii) Sei $H \subseteq F$ ein Unterfunktor. Wir sagen das $H \subseteq F$ *durch eine offene Immersion dargestellt* wird, falls für alle Paare (T, ξ) mit T einem Schema und $\xi \in F(T)$ ein offenes Unterschema $U_\xi \subseteq T$ gibt mit folgender Eigenschaft: Eine Abbildung $f\colon T' \to T$ faktorisiert über U_ξ genau dann wenn $F(f)(\xi) \in H(T')$ gilt.

(iv) Sei I eine Indexmenge, und $H_i \subseteq F$ eine I-indizierte Menge von Unterfunktoren von F. Wir sagen dass die H_i den Funktor F *überdecken*, falls es für alle $\xi \in F(T)$ eine offene Überdeckung $T = \bigcup_i U_i$ mit $\xi|_{U_i} \in H(U_i) \subseteq F(U_i)$.

Angenommen, F erfüllt (i) und es gibt eine Menge I und Unterfunktoren F_i sodass jedes F_i darstellbar ist, die $F_i \subseteq F$ durch offene Immersionen dargestellt werden und die (F_i) überdecken F. Zeige, dass daraus folgt dass F darstellbar ist.

Aufgabe 3.
Sei $f\colon S \to T$ eine Abbildung von Schema. Jedes S-Schema X wird durch f auch ein

T-Schema, welches wir ${}_T X$ nennen. Umgekehrt können wir zu jedem T-Schema Y via Basiswechsel entlang f ein S-Schema assozieren, welches wir mit Y_S bezeichnen.

(i) Zeige, dass diese Zuordnungen funktoriell sind und eine Adjunktion

$$ {}_T(-) \colon \mathrm{Sch}_S \rightleftarrows \mathrm{Sch}_T : (-)_S $$

definieren, wobei $(-)_S$ der rechstadjungierte Funktor ist.

Sei X nun ein S-Schema, und betrachte den Funktor

$$ \mathrm{Res}^X_{S/T} \colon \mathrm{Sch}_T^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set},\ Y \mapsto \mathrm{Mor}_S(Y_S, X). $$

(ii) Zeige, dass für eine endliche Körpererweiterung $k \subseteq K$ mit induzierter Abbildung $S = \mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(k) = T$ und $X = \mathrm{Spec}(A)$ mit A eine K-Algebra von endlichen Typ, der Funktor $\mathrm{Res}^X_{S/T}$ darstellbar ist.

(iii) Betrachte nun den Spezialfall $\mathbb{S} := \mathrm{Res}^{\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$. Zeige, dass die $\mathbb{R}$-wertigen Punkte von $\mathbb{S}$ beschrieben werden durch

$$ \mathbb{S}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 \neq 0 \right\} $$

Bemerkung. *Diese Woche gibt es nur drei Aufgaben, die aber alle vermutlich etwas länger sind.*