

Algebraische Geometrie I
Blatt 9

Abgabe: 18. Dezember

Aufgabe 1.

Sei \mathcal{C} eine Kategorie die alle Faserprodukte hat, und seien $X_1, X_2 \rightarrow Y$ und $Y \rightarrow Z$ Abbildungen in \mathcal{C} . Zeige, dass das folgende Diagramm kartesisch ist:

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times_Y X_2 & \longrightarrow & X_1 \times_Z X_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Y \times_Z Y \end{array}$$

Aufgabe 2.

Sei $F: \text{Sch}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ ein Funktor.

Definition.

- (i) F erfüllt die *Garbeneigenschaft für die Zariskitopologie* falls gilt: Für jedes Schema T und jede offene Überdeckung $T = \bigcup_{i \in I} U_i$ und jedes I -Tupel von Elementen $\xi_i \in F(U_i)$ so dass $\xi_i|_{U_i \cap U_j} = \xi_j|_{U_i \cap U_j}$ gibt es ein eindeutiges Element $\xi \in F(T)$ mit $\xi|_{U_i} = \xi_i \in F(U_i)$.
- (ii) Ein *Unterfunktor* H von F ist eine Zuordnung $T \mapsto H(T) \subseteq F(T)$ für jedes Schema T , sodass für alle Abbildung $f: T' \rightarrow T$ gilt $F(H(T)) \subseteq H(T')$.
- (iii) Sei $H \subseteq F$ ein Unterfunktor. Wir sagen das $H \subseteq F$ *durch eine offene Immersion dargestellt* wird, falls für alle Paare (T, ξ) mit T einem Schema und $\xi \in F(T)$ ein offenes Unterschema $U_\xi \subseteq T$ gibt mit folgender Eigenschaft: Eine Abbildung $f: T' \rightarrow T$ faktorisiert über U_ξ genau dann wenn $F(f)(\xi) \in H(T')$ gilt.
- (iv) Sei I eine Indexmenge, und $H_i \subseteq F$ eine I -indizierte Menge von Unterfunktoren von F . Wir sagen dass die H_i den Funktor F *überdecken*, falls es für alle $\xi \in F(T)$ eine offene Überdeckung $T = \bigcup_i U_i$ mit $\xi|_{U_i} \in H(U_i) \subseteq F(U_i)$.

Angenommen, F erfüllt (i) und es gibt eine Menge I und Unterfunktoren F_i sodass jedes F_i darstellbar ist, die $F_i \subseteq F$ durch offene Immersionen dargestellt werden und die (F_i) überdecken F . Zeige, dass daraus folgt dass F darstellbar ist.

Aufgabe 3.

Sei $f: S \rightarrow T$ eine Abbildung von Schema. Jedes S -Schema X wird durch f auch ein

T -Schema, welches wir ${}_T X$ nennen. Umgekehrt können wir zu jedem T -Schema Y via Basiswechsel entlang f ein S -Schema assoziieren, welches wir mit Y_S bezeichnen.

- (i) Zeige, dass diese Zuordnungen funktoriell sind und eine Adjunktion

$${}_T(-) : \text{Sch}_S \rightleftarrows \text{Sch}_T : (-)_S$$

definieren, wobei $(-)_S$ der rechstadjungierte Funktor ist.

Sei X nun ein S -Schema, und betrachte den Funktor

$$\text{Res}_{S/T}^X : \text{Sch}_T^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}, Y \mapsto \text{Mor}_S(Y_S, X).$$

- (ii) Zeige, dass für eine endliche Körpererweiterung $k \subseteq K$ mit induzierter Abbildung $S = \text{Spec}(K) \rightarrow \text{Spec}(k) = T$ und $X = \text{Spec}(A)$ mit A eine K -Algebra von endlichen Typ, der Funktor $\text{Res}_{S/T}^X$ darstellbar ist.
- (iii) Betrachte nun den Spezialfall $\mathbb{S} := \text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}^{\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 \setminus \{0\}}$. Zeige, dass die \mathbb{R} -wertigen Punkte von \mathbb{S} beschrieben werden durch

$$\mathbb{S}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$$

Bemerkung. Diese Woche gibt es nur drei Aufgaben, die aber alle vermutlich etwas länger sind.