Prof. Dr. Jakob Stix
Ruth Wild

Wintersemester 2024/25

Algebraische Geometrie I
Blatt 8

Abgabe: 11. Dezember

Aufgabe 1.
Sei $m \in \mathbb{Z}$. Betrachte die Abbildung

$$f\colon \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[x,y]/(xy^2 - m)) \to \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}).$$

Beschreibe die Fasern von f über allen $x \in \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$. Wie unterscheiden sich die Fälle $p \mid m$ and $p \nmid m$?

Aufgabe 2.
Sei k ein Körper. Beschreibe die Fasern an allen Punkten für die folgenden Abbildungen $\operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$, wobei die korrespondierenden Ringabbildungen $k[t] \to B$ jeweils die kanonischen sind.

(i) $\operatorname{Spec}(k[t,u]/(tu - 1)) \to \operatorname{Spec}(k[t])$
(ii) $\operatorname{Spec}(k[t,u]/(t^2 - u^2)) \to \operatorname{Spec}(k[t])$
(iii) $\operatorname{Spec}(k[t,u]/(t^2 + u^2)) \to \operatorname{Spec}(k[t])$
(iv) $\operatorname{Spec}(k[t,u]/(t - u^2)) \to \operatorname{Spec}(k[t])$.

Aufgabe 3.
Sei $\operatorname{Spec}(A_i)_{i \in I}$ ein inverses System von affinen Schemata, und sei $A := \operatorname{colim}_i A_i$. Zeige, dass die kanonische Abbildung

$$|\operatorname{Spec}(A)| \to \lim_i |\operatorname{Spec}(A_i)|$$

ein Homeomorphismus ist.

Aufgabe 4.
Sei X, Y, S drei affine Schema, mit Abbildungen $f\colon X \to S$, $g\colon Y \to S$. Zeige, dass die kanonische Abbildung

$$\pi\colon |X \times_S Y| \to |X| \times_{|S|} |Y|$$

surjektiv ist. Zeige anhand von Beispielen dass die Fasern von π diskret oder unendlich sein können.