

**Algebraische Geometrie I**  
**Blatt 8**

Abgabe: 11. Dezember

**Aufgabe 1.**

Sei  $m \in \mathbb{Z}$ . Betrachte die Abbildung

$$f: \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[x, y]/(xy^2 - m)) \rightarrow \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}).$$

Beschreibe die Fasern von  $f$  über allen  $x \in \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ . Wie unterscheiden sich die Fälle  $p \mid m$  and  $p \nmid m$ ?

**Aufgabe 2.**

Sei  $k$  ein Körper. Beschreibe die Fasern an allen Punkten für die folgenden Abbildungen  $\operatorname{Spec}(B) \rightarrow \operatorname{Spec}(A)$ , wobei die korrespondierenden Ringabbildungen  $k[t] \rightarrow B$  jeweils die kanonischen sind.

- (i)  $\operatorname{Spec}(k[t, u]/(tu - 1)) \rightarrow \operatorname{Spec}(k[t])$
- (ii)  $\operatorname{Spec}(k[t, u]/(t^2 - u^2)) \rightarrow \operatorname{Spec}(k[t])$
- (iii)  $\operatorname{Spec}(k[t, u]/(t^2 + u^2)) \rightarrow \operatorname{Spec}(k[t])$
- (iv)  $\operatorname{Spec}(k[t, u]/(t - u^2)) \rightarrow \operatorname{Spec}(k[t])$ .

**Aufgabe 3.**

Sei  $\operatorname{Spec}(A_i)_{i \in I}$  ein inverses System von affinen Schemata, und sei  $A := \operatorname{colim}_i A_i$ . Zeige, dass die kanonische Abbildung

$$|\operatorname{Spec}(A)| \rightarrow \lim_i |\operatorname{Spec}(A_i)|$$

ein Homeomorphismus ist.

**Aufgabe 4.**

Sei  $X, Y, S$  drei affine Schema, mit Abbildungen  $f: X \rightarrow S, g: Y \rightarrow S$ . Zeige, dass die kanonische Abbildung

$$\pi: |X \times_S Y| \rightarrow |X| \times_{|S|} |Y|$$

surjektiv ist. Zeige anhand von Beispielen dass die Fasern von  $\pi$  diskret oder unendlich sein können.