Prof. Dr. Jakob Stix
Ruth Wild

Wintersemester 2024/25

# Algebraische Geometrie I
## Blatt 7

Abgabe: 4. Dezember

**Aufgabe 1.**
Sei $p$ eine Primzahl. Für einen Ring $A$ sagen wir das $A$ Charakteristik $p$ hat falls $p \cdot 1_A = 0$ gilt. Wir schreiben $i\colon \operatorname{Spec}(\mathbb{F}_p) \to \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ für die kanonische Abbildung.

Sei $X$ ein Schema. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ hat der Ring $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ Charakteristik $p$.

(ii) Der Ring $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ hat Charakteristik $p$.

(iii) Die kanonische Abbildung $X \to \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ faktorisiert über $i$.

Sind diese Aussagen auch äquivalent zu:

(iv) Für alle $x \in X$ hat der Körper $k(x)$ Charakteristik $p$?

**Aufgabe 2.**
Sei $X$ ein Schema, setze $A := \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Sei $f \in A$ und sei

$$X_f := \{x \in X \mid f_x \notin \mathfrak{m}_x\}.$$

Zeige:

(i) Sei $U = \operatorname{Spec} B \subseteq X$ ein affines offenes Unterschema, und sei $\bar{f} \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ das Bild von $f$ unter der Einschränkungsabbildung $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$. Dann gilt $U \cap X_f = D(\bar{f})$. Schließe daraus das $X_f \subseteq X$ eine offene Teilmenge ist.

(ii) Angenommen, $X$ ist quasi-kompakt. Sei $a \in A$ mit sodass $\bar{a} = 0 \in \Gamma(X_f, \mathcal{O}|_{X_f})$. Zeige, dass es dann ein $n > 0$ gibt mit $f^n a = 0$ in $A$.

(iii) Angenommen, der $X$ zugrunde liegende topologische Raum ist noethersch. Sei $b \in \Gamma(X_f, \mathcal{O}_X|_{X_f})$. Zeige, dass es dann ein $n > 0$ gibt sodass $f^n b$ im Bild der Abbildung $A \to \Gamma(X_f, \mathcal{O}_X|_{X_f})$ liegt. Schließe daraus, dass $\Gamma(X_f, \mathcal{O}_X|_{X_f}) = A_f$ gilt.

**Aufgabe 3.**
Sei $k$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\mathbb{P}^1(k)$ die projektive Gerade (aufgefasst als Varietät). Zeige, dass $\dim \mathbb{P}^1(k) = 1$.

**Aufgabe 4.**
Diese Aufgabe baut auf Aufgabe 1 des letzten Blatts auf.

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein $k$-Schema[1] und $x \in X$ ein Punkt. Sei $k(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$, und betrachte

$$T_x := \mathrm{Hom}_{k(x)}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, k(x)).$$

Sei $k[\varepsilon] = k[t]/t^2$.

(i) Zeige, dass das Datum eines Morphisms von $k$-Schemata $\mathrm{Spec}(k[\varepsilon]) \to X$ äquivalent ist zu dem Datum eines Paars $(x, v)$ mit $x \in X$ ein $k$-rationaler Punkt (d.h. $k(x) = k$) und $v \in T_x$.

(ii) Berechne $T_0$ für $\mathbb{A}_k^n$ und für $\mathrm{Spec}(k[x,y]/(y^2 + x^3))$.

[1] d.h. wir fixieren auch eine Abbildung $X \to \mathrm{Spec}(k)$ für $k$ ein Körper