Prof. Dr. Jakob Stix
Ruth Wild

Wintersemester 2024/25

Algebraische Geometrie I
Blatt 6

Abgabe: 27. November

Aufgabe 1.
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema, $x \in X$ ein Punkt und sei $k(x) := \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$.

(i) Sei K ein Körper. Zeige, dass das Datum eines Morphismus von Schemata

$$(\mathrm{Spec}(K), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(K)}) \to (X, \mathcal{O}_X)$$

mit topologischem Bild x äquivalent ist zu einer Körpererweiterung $k(x) \hookrightarrow K$.

(ii) Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein k-Schema, d.h. es wird eine Abbildung von Schemata $(X, \mathcal{O}_X) \to (\mathrm{Spec}(k), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k)})$ fixiert. Zeige, dass jeder Körper $k(x)$ auf natürliche Weise eine Körpererweiterung $k \hookrightarrow k(x)$ ist.

(iii) Ein Punkt x heißt k-rationaler Punkt falls $k = k(x)$ gilt. Sei $X(k)$ die Menge der k-rationalen Punkte. Zeige, dass $X(k)$ in Bijektion mit der Menge von Abbildungen von k-Schemata $(\mathrm{Spec}(k), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k)}) \to (X, \mathcal{O}_X)$ steht, d.h. Abbildungen für die die Verknüpfung

$$(\mathrm{Spec}(k), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k)}) \to (X, \mathcal{O}_X) \to (\mathrm{Spec}(k), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k)}) \to (X, \mathcal{O}_X)$$

die Identität ist.

Hinweis: Falls benötigt, kann an dieser Stelle bereits die Kategorieäquivalenz zwischen affinen Schemata und Ringen genutzt werden.

Aufgabe 2.
Ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt quasi-kompakt falls X als topologischer Raum quasi-kompakt ist. Zeige:

(i) Jedes affine Schema ist quasi-kompakt.

(ii) Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema, und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Dann ist $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ wieder ein Schema.

(iii) Sei $\mathbb{A}_k^\infty := \mathrm{Spec}(k[x_1, x_2, \ldots])$. Dann ist $\mathbb{A}_k^\infty \setminus \{0\}$ ein Schema das nicht quasi-kompakt ist.

Aufgabe 3.
Sei X ein Schema. Zeige, dass jede irreduzible Komponente von X einen eindeutigen generischen Punkt η hat.

Aufgabe 4.
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum. Zeige, dass der topologische Raum X genau dann zusammenhängend ist wenn der Ring $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ keine nicht-trivialen idempotente Elemente enthält.