

Algebraische Geometrie I
Blatt 6

Abgabe: 27. November

Aufgabe 1.

Sei (X, \mathcal{O}_X) ein Schema, $x \in X$ ein Punkt und sei $k(x) := \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$.

- (i) Sei K ein Körper. Zeige, dass das Datum eines Morphismus von Schemata

$$(\mathrm{Spec}(K), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(K)}) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

mit topologischem Bild x äquivalent ist zu einer Körpererweiterung $k(x) \hookrightarrow K$.

- (ii) Sei (X, \mathcal{O}_X) ein k -Schema, d.h. es wird eine Abbildung von Schemata $(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (\mathrm{Spec}(k), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k)})$ fixiert. Zeige, dass jeder Körper $k(x)$ auf natürliche Weise eine Körpererweiterung $k \hookrightarrow k(x)$ ist.

- (iii) Ein Punkt x heißt k -rationaler Punkt falls $k = k(x)$ gilt. Sei $X(k)$ die Menge der k -rationalen Punkte. Zeige, dass $X(k)$ in Bijektion mit der Menge von Abbildungen von k -Schemata $(\mathrm{Spec}(k), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k)}) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ steht, d.h. Abbildungen für die die Verknüpfung

$$(\mathrm{Spec}(k), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k)}) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (\mathrm{Spec}(k), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k)}) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

die Identität ist.

Hinweis: Falls benötigt, kann an dieser Stelle bereits die Kategorieäquivalenz zwischen affinen Schemata und Ringen genutzt werden.

Aufgabe 2.

Ein Schema (X, \mathcal{O}_X) heißt quasi-kompakt falls X als topologischer Raum quasi-kompakt ist. Zeige:

- (i) Jedes affine Schema ist quasi-kompakt.
(ii) Sei (X, \mathcal{O}_X) ein Schema, und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Dann ist $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ wieder ein Schema.
(iii) Sei $\mathbb{A}_k^\infty := \mathrm{Spec}(k[x_1, x_2, \dots])$. Dann ist $\mathbb{A}_k^\infty \setminus \{0\}$ ein Schema das nicht quasi-kompakt ist.

Aufgabe 3.

Sei X ein Schema. Zeige, dass jede irreduzible Komponente von X einen eindeutigen generischen Punkt η hat.

Aufgabe 4.

Sei (X, \mathcal{O}_X) ein lokal geringter Raum. Zeige, dass der topologische Raum X genau dann zusammenhängend ist wenn der Ring $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ keine nicht-trivialen idempotente Elemente enthält.