Prof. Dr. Jakob Stix
Ruth Wild

Wintersemester 2024/25

Algebraische Geometrie I
Blatt 5

Abgabe: 20. November

Aufgabe 1.
Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe von Mengen auf einem topologischen Raum X, und $\mathcal{F}^+$ ihre Garbifizierung. Finde Beispiele in denen die kanonische Abbildung $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ nicht injektiv bzw. nicht surjektiv ist.

Aufgabe 2.
Sei X ein topologischer Raum, $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ eine offene Überdeckung. Weiters sei für jedes λ eine Garbe von Mengen $\mathcal{F}_\lambda$ auf U_λ gegeben. Wir treffen folgenden Annahmen:

- Für jedes Paar (λ, μ) gibt es einen Isomorphismus $\theta_{\lambda\mu} \colon \mathcal{F}_\mu|_{U_\lambda \cap U_\mu} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_\lambda|_{U_\lambda \cap U_\mu}$;
- Für jedes Tripel (λ, μ, ν) seien $\theta'_{\lambda\mu}$, $\theta'_{\mu\nu}$ und $\theta'_{\lambda\nu}$ die Einschränkungen von $\theta_{\lambda\mu}$, $\theta_{\mu\nu}$ und $\theta_{\lambda\nu}$ auf $U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\nu$. Dann gilt: $\theta'_{\lambda\nu} = \theta'_{\lambda\mu} \circ \theta'_{\mu\nu}$.

Zeige, dass dann gilt: Es gibt eine eindeutig bestimmte Garbe $\mathcal{F}$ auf X, und für jedes $\lambda \in \Lambda$ einen Isomorphismus $\eta_\lambda \colon \mathcal{F}|_{U_\lambda} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_\lambda$, sodass für jedes Paar (λ, ν) gilt $\theta_{\lambda\mu} = \eta'_\lambda \circ \eta'^{-1}_\mu$ auf $U_\lambda \cap U_\mu$ (wobei mit $'$ erneut die entsprechende Einschränkung markiert wird.)

Aufgabe 3.
Sei $X = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\} \cup \{0\} \subseteq \mathbf{R}$, und sei A eine beliebige Menge. Für $U \subseteq X$ offen sei

$$\mathcal{F}(U) := \{f \colon U \setminus \{0\} \to A\}.$$

(i) Zeige, dass diese Zuordnung eine Garbe auf X definiert.

(ii) Zeige, dass der Halm $\mathcal{F}_0$ mit der Menge aller Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ identifiziert werden kann, wobei zwei Folgen als gleich betrachtet werden falls es ein N gibt mit $a_n = b_n$ für alle $n \geq N$.

Aufgabe 4.
Finde ein Beispiel für einen topologischen Raum X und eine Folge von Prägarben $\mathcal{F}_n$ auf X, sodass $\mathcal{F}_n^+ = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\mathcal{G}^+ \neq 0$, wobei $\mathcal{G}$ die Prägarbe $\mathcal{G} := \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ ist.