Prof. Dr. Jakob Stix
Ruth Wild

Wintersemester 2024/25

Algebraische Geometrie I
Blatt 4

Abgabe: 13. November

Aufgabe 1.
Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von Mengen auf einem topologischen Raum X, $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge, und $s, t \in \mathcal{F}(U)$. Zeige: Es ist

$$\{x \in U \mid s_x = t_x\} \subseteq U$$

eine offene Teilmenge.

Sei nun $\mathcal{F}$ eine Garbe von abelschen Gruppen auf X. Für $U \subseteq X$ offen und $s \in \mathcal{F}(U)$ sei $\operatorname{supp}(s) := \{x \in U \mid s_x \neq 0\}$. Zeige, dass $\operatorname{supp}(s) \subseteq U$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 2.
Sei X ein topologischer Raum, $Z \subseteq X$ abgeschlossen, und $\mathcal{F}$ eine Garbe von abelschen Gruppen auf X. Sei $U \subseteq X$ offen. Setze $\Gamma_Z(\mathcal{F}, U) := \{s \in \mathcal{F}(U) \mid \operatorname{supp}(s) \subseteq Z \cap U\}$, wobei $\operatorname{supp}(s)$ wie in Aufgabe 1 definiert ist. Zeige, dass die Zuordnung $U \mapsto \Gamma_Z(\mathcal{F}, U)$ eine Garbe auf X definiert.

Aufgabe 3.
Sei X ein topologischer Raum, und $\mathcal{F}$ eine Garbe von Mengen auf X. Sei

$$E(\mathcal{F}) := \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

als Menge. Sei $\pi\colon E(\mathcal{F}) \to X, s_x \mapsto x$ die natürliche Projektion. Weiters sei $E(\mathcal{F})$ mit folgender Topologie versehen: Für $U \subseteq X$ offen und $s \in \mathcal{F}(U)$ definiert die Abbildung $x \mapsto s_x$ eine Abbildung $s_{(-)}\colon U \to E(\mathcal{F})$, die ein Schnitt der eingeschränkten Abbildung $\pi|_{x \in U}$ ist. Die Topologie auf X sei die stärkste Topologie sodass alle $s_{(-)} \in \{s_{(-)}\colon U \to E(\mathcal{F}) \mid U \in X \text{ offen }\}$ stetig sind. Zeige, dass dadurch die Abbildung π zu einem lokalen Homöomorphismus wird.

Aufgabe 4.
Sei X ein topologischer Raum.

(i) Sei A eine abelsche Gruppe. Zeige, dass die Prägarbe $U \mapsto A$ keine Garbe auf X ist.

(ii) Sei $\underline{A}$ die Prägarbe auf X die gegeben ist durch $U \mapsto \{f\colon U \to A \mid f \text{ ist lokal konstant }\}$. Zeige, dass $\underline{A}$ eine Garbe auf X ist. Was sind die Halme von $\underline{A}$?

(iii) Zeige als Vorbereitung für die letzte Teilaufgabe: Ein topologischer Raum X ist noethersch genau dann wenn gilt: jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist quasi-kompakt.

(iv) Sei nun $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ ein induktives System von Garben auf X. Angenommen X ist noethersch. Zeige, dass dann die Prägarbe $U \mapsto \operatorname{colim} \mathcal{F}_i(U)$ eine Garbe auf X ist. Was passiert wenn X nicht als noethersch angenommen wird?