Prof. Dr. Jakob Stix
Ruth Wild

Wintersemester 2024/25

Algebraische Geometrie I
Blatt 3

Abgabe: 6. November

Auf dem gesamten Blatt ist k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1.
Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$ eine *irreduzible* algebraische Teilmenge. Sei $k(X)$ der Ring der rationalen Funktionen auf X, und $\varphi \in k(X)$. Für $x \in X$ heißt φ *regulär* in x, falls es Polynome $f, g \in k[X]$ gibt mit $\varphi = f/g$ und $g(x) \neq 0$. Zeige:

(i) Für $\varphi \in k(X)$ gilt: $\varphi \in k[X]$ genau dann wenn φ regulär in jedem $x \in X$ ist.

(ii) Die in x regulären rationalen Funktionen haben die Struktur eines lokalen Rings, wobei das maximale Ideal gegeben ist durch all die φ mit $\varphi(x) = 0$.

(iii) Sei $n \geq 2$, $X = \mathbb{A}^n_k$ und $\varphi \in k(X)$ eine Funktion die für alle $x \in \mathbb{A}^n_k \setminus \{0\}$ regulär ist. Dann gilt $\varphi \in k[X]$.

Aufgabe 2.
Betrachte $X = V(s^5 - t^2 + 8) \subset \mathbb{A}^2_k$ mit Koordinaten s, t. Sei $x = (1, 3) \in X$. Sei $U = X \setminus \{x\}$. Zeige, dass es eine reguläre Funktion auf U gibt die nicht die Einschränkung eines Polynoms ist.

Aufgabe 3.
Zeige: $\mathbb{A}^n_k$ ist irreduzibel.

Aufgabe 4.
Sei $Z = V(f_1, \dots, f_m) \subseteq \mathbb{A}^n_k$ eine algebraische Teilmenge. Dann gilt für jede irreduzible Komponente $W \subset Z$: $\dim(W) \geq n - m$.