Prof. Dr. Jakob Stix
Ruth Wild

Wintersemester 2024/25

Algebraische Geometrie I
Blatt 2

Abgabe: 30. Oktober

Auf dem gesamten Blatt ist k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1.
Sei k ein Körper.

(i) Sei $Z \subseteq \mathbb{A}_k^n$ eine algebraische Menge, und $U \subseteq Z$ offen. Zeige, dass es dann $h_1, \ldots, h_m \in \mathcal{O}_Z(Z)$ gibt mit
$$U = \bigcup_{i=1}^{m} D(h_i).$$

(ii) Seien $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ und $Y \subseteq \mathbb{A}_k^m$ algebraische Mengen, und $f\colon X \to Y$ eine algebraische Abbildung. Zeige, dass f eine stetige Abbildung ist.

Aufgabe 2.
Sei $X = V(x^3 - y^2) \subseteq \mathbb{A}_k^2$.

(i) Zeige, dass die Abbildung $\mathbb{A}_k^1 \to X$, $t \mapsto (t^2, t^3)$ algebraisch ist, und ein Homöomorphismus von topologischen Räumen.

(ii) Zeige, dass f jedoch kein Isomorphismus von algebraischen Mengen ist.

(iii) Kann es überhaupt einen Isomorphismus von algebraischen Mengen $\mathbb{A}_k^1 \xrightarrow{\sim} X$ geben?

Aufgabe 3.
Sei $X := \mathbb{A}_k^2$. Betrachte die Abbildung $\varphi\colon X \to X$, $(a, b) \mapsto (a, ab)$.

(i) Zeige, dass die Einschränkung $\varphi|_{D(x)}$ einen Homöomorphismus $D(x) \to D(x)$ induziert, und das die induzierte Abbildung $\mathcal{O}_X(D(x)) \to \mathcal{O}_X(D(x))$ ein Ringisomorphismus ist.

(ii) Beschreibe die Fasern von φ.

Aufgabe 4.
Sei k algebraisch abgeschlossen, und $Z \subseteq \mathbb{A}_k^n$ eine algebraische Menge. Angenommen, es gibt eine Zerlegung $I(Z) = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \mathfrak{p}_n$ für Primideale $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_i \not\subset \mathfrak{p}_j$ for $i \neq j$. Dann sind die irreduziblen Komponenten von Z gegeben durch $V(\mathfrak{p}_i)$.

Aufgabe 5.
Ein topologischer Raum X heißt *nüchtern* falls es für jede irreduzible, abgeschlossene Teilmenge $Z \subseteq X$ einen eindeutigen Punkt η_Z gibt $\overline{\{\eta_Z\}} \cong Z$. Sei $\mathrm{Top}^{\mathrm{sob}} \subseteq \mathrm{Top}$ die volle Unterkategorie der nüchternen topologischen Räume.

(i) Zeige, dass die Inklusion $\mathrm{Top}^{\mathrm{sob}} \hookrightarrow \mathrm{Top}$ ein rechtsadjungierter Funktor ist. Wir bezeichnen den Linksadjungierten als $X \mapsto \mathrm{sob}(X)$.

(ii) Zeige, dass für einen topologischen Raum X der Raum $\mathrm{sob}(X)$ nur von dem Poset $\mathrm{Ouv}(X)$ der offenen Teilmengen in X abhängt: für X, Y zwei topologische Räume gilt $\mathrm{Ouv}(X) \cong \mathrm{Ouv}(Y)$ genau dann wenn $\mathrm{sob}(X) \cong \mathrm{sob}(Y)$.