Prof. Dr. Jakob Stix
Ruth Wild

Wintersemester 2024/25

Algebraische Geometrie I
Blatt 13

Abgabe: 5. Februar

Aufgabe 1.
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum. Ein $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F}$ hat *endliche Präsentation* falls für alle $x \in X$ eine offene Umgebung $x \in U$ und eine exakte Sequenz der Form

$$\mathcal{O}_X^m|_U \to \mathcal{O}_X^n|_U \to \mathcal{F}|_U \to 0$$

existiert (wobei n, m von x abhängen können.) Sei $\mathcal{F}$ ein endlich präsentierte $\mathcal{O}_X$-Modul auf einem geringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$. Zeige:

(i) Wenn $X = \operatorname{Spec}(A)$ ein affines Schema ist, dann gilt für einen A-Modul M: M ist ein endlich präsentierter A-Modul genau dann wenn $\tilde{M}$ ein endlich präsentierter $\mathcal{O}_X$-Modul ist.

(ii) Für alle $x \in X$ und $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{G}$ ist die kanonische Abbildung

$$\mathcal{H}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$$

bijektiv.

(iii) Angenommen, $\mathcal{G}$ ist ebenfalls endlich präsentiert. Sei $x \in X$ und $\theta \colon \mathcal{F}_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_x$ ein Isomorphismus von $\mathcal{O}_{X,x}$-Moduln. Dann gibt es eine offene Umgebung $x \in U$ und einen Isomorphismus $u \colon \mathcal{F}|_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}|_U$ von $\mathcal{O}_U$-Moduln so dass $u_x = \theta$.

Aufgabe 2.
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum. Ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ hat *endlichen Typ* falls für alle $x \in X$ eine offene Umgebung $x \in U$ und eine exakte Sequenz der Form

$$\mathcal{O}_X^n|_U \to \mathcal{F}|_U \to 0$$

existiert (wobei n, m von x abhängen können.) Sei nun $\mathcal{F}$ von endlichem Typ, und $s_1, \dots, s_n \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ Schnitte über einen offenen Menge $U \subseteq X$. Angenommen, die Keime $(s_i)_x \in \mathcal{F}_x$ ergzeugen $\mathcal{F}_x$ als $\mathcal{O}_{X,x}$-Moddul. Dann gibt es eine offene Menge $x \in V$ so dass die $s_i|_V$ die Einschränkung $\mathcal{F}|_V$ als $\mathcal{O}_V$-Modul erzeugen.

Sei $r \geq 0$, und

$$X_r := \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \text{ kann von } r \text{ Elementen als } \mathcal{O}_{X,x}\text{-Modul erzeugt werden}\}.$$

Zeige, dass $X_r \subset X$ offen ist. Zeige, dass für $(X, \mathcal{O}_X)$ lokal geringt gilt:

$$X_r = \{x \in X \mid \dim_{\kappa(x)} \mathcal{F}_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{F}_x \leq r\}.$$

Aufgabe 3.
Sei $f\colon X \to Y$ eine qcqs-Abbildung von Schema und $\mathcal{F}$ eine quasi-koherente Garbe auf X. Zeige, dass dann $f_*\mathcal{F}$ ebenfalls quasi-koherent ist. Finde ein Beispiel von einer Abbildung $f\colon X \to Y$ und $\mathcal{F}$ quasi-koherent sodass $f_*\mathcal{F}$ nicht quasi-koherent ist.

Aufgabe 4.
Sei $f\colon X \to Y$ eine beliebige Abbildung von Schema, und $\mathcal{F}$ eine quasi-koherente Garbe auf X. Zeige:

(i) $f^*\mathcal{F}$ ist quasi-koherent.

(ii) Angenommen, $X = \operatorname{Spec}(B)$ und $Y = \operatorname{Spec}(A)$, mit $\mathcal{F} = \widetilde{M}$. Dann gilt

$$f^*(\mathcal{F}) \cong M \widetilde{\otimes_A} B.$$