Prof. Dr. Jakob Stix
Ruth Wild

Wintersemester 2024/25

Algebraische Geometrie I
Blatt 12

Abgabe: 29. Januar

Aufgabe 1.
Sei $A = \bigoplus_{d\geq 0} A_d$ ein graduierter Ring und $n > 0$. Sei $A^{(n)} = \bigoplus_{d\geq 0} A_d^{(n)}$ der graduierte Ring mit $A_d^{(n)} = A_{dn}$.

(i) Zeige dass es einen Isomorphismus $\mathrm{Proj}(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Proj}(A^{(n)})$ gibt.

(ii) Sei $A = k[x_0, \dots, x_r]$. Sei N die Dimension des k-Vektorraums der homogenen Grad n Polynome in den x_j. Zeige, dass die Surjektion $k[y_0, \dots, y_N] \twoheadrightarrow A^{(n)}$ die y_i auf das i-te Monom von Grad n in den x_j abbildet (die Reihenfolge spielt keine Rolle) eine abgeschlossene Immersion $\mathbb{P}_k^r \hookrightarrow \mathbb{P}_k^N$ induziert.

Aufgabe 2.
Für A einen Ring und $I \subseteq A$ ein Ideal setzen wir

$$\mathcal{R}_A(I) := \bigoplus_{d\geq 0} I^d = A \oplus I \oplus I^2 \oplus \dots$$

Sei $A = k[x,y]$ und $I = (x,y)$, und setze $Y = \mathrm{Proj}(\mathcal{R}_A(I))$. Nach Vorlesung haben wir eine natürliche Abbildung $Y \to \mathrm{Spec}(\mathcal{R}_A(I)_0)$. Beschreibe die Fasern dieser Abbildung.

Aufgabe 3.
Ein graduierter Ring $A = \bigoplus_{d\geq 0} A_d$ heißt *endlich erzeugt in Grad 1* falls es als A_0 durch endlich viele $a_1, \dots, a_n \in A_1$ erzeugt wird. Zeige, dass es dann für ein $n \geq 0$ eine abgeschlossene Immersion $\mathrm{Proj}(A) \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{A_0}$ über $\mathrm{Spec}(A_0)$ gibt.

Notation. Sei $A = \bigoplus_{d\geq 0} A_d$ ein graduierter Ring. Sei $S \subseteq A$ ein multiplikatives System welches aus homogenen Elementen besteht. Wir schreiben

$$(S^{-1}A)_0 := \{a/b \in S^{-1}A \mid \deg(a) = \deg(b)\} \subseteq S^{-1}A.$$

- Für $a \in A$ ein homogenes Element und $S = \{a^i\}_{i\geq 0}$ setzen wir $A_{(a)} := (S^{-1}A)_0$.
- Für $\mathfrak{p} \subseteq A$ ein Primideal und S die Menge der homogenen Elemente in $A \setminus \mathfrak{p}$ setzen wir $S_{(\mathfrak{p})} = (S^{-1}A)_0$.

Aufgabe 4.
Sei $A = \bigoplus_{d\geq 0} A_d$ ein graduierter Ring. Sei $X = \mathrm{Proj}(A)$. Zeige:

(i) Sei $f \in A_+$ homogen. Dann ist $\Gamma(D_+(f), \mathcal{O}_X) = A_{(f)}$.

(ii) Sei $\mathfrak{p}$ ein homogenes Primideal welches A_+ nicht enthält, und $x \in X$ der korrespondierende Punkt. Dann gilt $\mathcal{O}_{X,x} = A_{(\mathfrak{p})}$.

(iii) Das Schema $\mathrm{Proj}(A)$ ist quasi-kompakt genau dann wenn es endlich viele homogene Elemente $f_1, \dots, f_n$ gibt mit $A_+ \subseteq \sqrt{(f_1, \dots, f_n)}$.