

Algebraische Geometrie I
Blatt 11

Abgabe: 23. Januar

Aufgabe 1.

Zeige: die Verknüpfung von separierten Morphismen bzw. abgeschlossenen Immersionen ist wieder separiert bzw. eine abgeschlossene Immersion.

Aufgabe 2.

Sei R ein (beliebiger) Ring. Ein R -Modul M heißt invertierbar falls der Endofunktor $M \otimes_R -$ eine Äquivalenz ist. Ein R -Modul M heißt lokal frei von endlichem Rank falls es f_1, \dots, f_n mit $(f_1, \dots, f_n) = R$ gibt so dass für alle i der $R[f_i^{-1}]$ -Modul $M[f_i^{-1}]$ frei von endlichem Rank ist. Zeige:

- (i) Falls M invertierbar ist, dann ist M direkter Summand von einem freien R -Modul von endlichem Rank ist.
- (ii) Ein R -Modul M ist lokal frei von endlichem Rank genau dann wenn M endlich präsentiert und flach ist.
- (iii) Ein R -Modul ist invertierbar genau dann wenn er lokal frei von Rank 1 ist.

Aufgabe 3.

Sei $n \geq 1$. Zeige, dass der Funktor

$$X \mapsto \{a: \mathcal{O}_X^n \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X^n \mid a \text{ ist ein } \mathcal{O}_X\text{-linearer Isomorphismus}\}$$

von einem Schema dargestellt wird.

Aufgabe 4.

Sei M ein R -Modul. Zeige, dass die Zuordnung $D(f) \mapsto M[f^{-1}]$ eine Garbe auf den standard offenen Teilmengen von $\text{Spec}(R)$ definiert.