Prof. Dr. Jakob Stix
Ruth Wild

Wintersemester 2024/25

Algebraische Geometrie I
Blatt 10

Abgabe: 16. Januar

Aufgabe 1.

(i) Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung von Schemata. Angenommen, es gibt eine offene Überdeckung $Y = \bigcup_i U_i$ so dass die induzierten Abbildungen $f^{-1}(U_i) \to U_i$ Isomorphismen sind. Zeige, dass f dann bereits ein Isomorphismus ist.

(ii) Zeige, dass für ein Schema X äquivalent sind:

(a) X ist affin.

(b) Es gibt endlich viele Elemente $f_1, \dots, f_r \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ sodass die offnene Teilmengen

$$X_f = \{x \in X \mid f \notin \mathfrak{m}_x\} \subseteq X$$

affin sind, und $(f_1, \dots, f_r) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ gilt.

(iii) Zeige, dass für $f\colon X \to Y$ eine Abbildung von affinen Schema und $U \subseteq Y$ offen und affin $f^{-1}(U)$ wieder affin ist.

(iv) Gilt die Aussage aus (iii) wenn X, Y nicht notwendigerweise affin sind?

Aufgabe 2.

Remark. Diese Aufgabe ist etwas länger, und nicht unbedingt notwendig für das Verständnis der weiteren Vorlesung. Wenn sie zu schwer ist, kann es auch hilfreich sein, zu versuchen den Beweis in [GD71, Rem.I.2.3.6, S. 220] zu verstehen.

Sei Sch die Kategorie der Schema. Eine Kollektion von von Abbildungen $\{U_i \to U\}$ in Sch heißt Überdeckung falls jedes U_i eine offene Teilmenge in U ist und $\mathcal{O}_{U_i} = \mathcal{O}_U|_{U_i}$ und $\bigcup_i U_i = U$ gilt. Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf Sch. Wir sagen dass $\mathcal{F}$ eine Garbe ist falls für jedes Schema U und jede Überdeckung $\{U_i \to U\}$ das Diagram

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_i \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i_0 \times i_1} \mathcal{F}(U_{i_0} \times U_{i_1})$$

ein Egalisator in der Kategorie der Mengen ist. Sei $\mathrm{Aff} \subseteq \mathrm{Sch}$ die volle Unterkategorie von affinen Schemata. Eine Überdeckung in Aff ist eine Überdeckung in Sch sodass jedes U_i affin ist. Zeige, dass durch Einschränkung ein Isomorphismus

$$\text{Garben auf Sch} \xrightarrow{\sim} \text{Garben auf Aff}$$

induziert wird.

Aufgabe 3.
Sei $f\colon Z \to X$ eine Abbildung von Schemata. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist eine abgeschlossene Immersion, d.h. f induziert einen Homöomorphismus auf eine abgeschlossene Teilmenge von X und die Abbildung $\mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Z$ ist eine Surjektion von Garben.

(ii) Für alle $U \subseteq X$ affin offen ist $f^{-1}(U) \subseteq Z$ offen und die induzierte Abbildung auf globalen Schnitten ist eine surjektive Ringabbildung.

(iii) Es gibt eine affin offene Überdeckung von X sodass jedes U_i dieser Überdeckung (ii) erfüllt.

Aufgabe 4.
Ein Schema X heißt separiert falls die Diagonale $X \to X \times X$ eine abgeschlossene Immersion ist. Zeige, dass in einem separierten Schema der Schnitt von zwei affin offenen Unterschema wieder affin ist.

References

[GD71] Grothendieck, A. and Dieudonné, J. *Éléments de géométrie algébrique I*. Vol. 166. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1971.