Prof. Dr. Jakob Stix
Ruth Wild

Wintersemester 2024/25

Algebraische Geometrie I
Blatt 1

Abgabe: 23. Oktober

Aufgabe 1.
Beschreibe die Primideale in $\mathbb{C}[x, y]$.

Aufgabe 2.
Sei K ein Köper, $V \subseteq \mathbb{A}^n_K$ eine algebraische Menge. Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{A}^n_K$ endlich viele Punkte, mit $x_i \notin V$ für alle $1 \leq i \leq n$. Dann gibt es bereits ein $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ so dass $f(x_i) \neq 0$ für alle $1 \leq i \leq n$ und $f(z) = 0$ für alle $z \in V$.

Aufgabe 3.
Sei R ein Ring, $I, J \subseteq R$ Ideale. Beweise:

(i) Falls $\sqrt{IJ} = R$, dann bereits $I = R$ und $J = R$.

(ii) Sei $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal. Angenommen, $IJ = \mathfrak{p}$. Dann gilt bereits $I = \mathfrak{p}$ oder $J = \mathfrak{p}$.

(iii) Finde ein Beispiel für $\sqrt{I} + \sqrt{J} \neq \sqrt{I + J}$.

Sei nun $R = K[x, y]$ mit K ein Körper, und $I = (x^2, xy)$.

(iv) Zeige, dass $\sqrt{I}$ ein Primideal ist, aber I kein Primärideal ist.

Sei nun $R = K[x, y, z]/(xyz, y^2)$.

(v) Zeige, dass die Ideale $(x), (z) \subseteq R$ Primärideale sind, und bestimme ihre Radikale.

Aufgabe 4.
Löse die verbleibenden Wahr-oder-Falsch-Fragen von Zettel 0.