Prof. Dr. Jakob Stix
Ruth Wild

Wintersemester 2024/25

Algebraische Geometrie I
Blatt 0

Abgabe: keine.

Ring bedeutet kommutativer Ring mit 1, (a) ist das von a erzeugte Ideal.

Wahr oder falsch — entscheide mit Begründung.

(i) Sei A ein Integritätsbereich, mit Quotientenkörper Q. Dann gilt

$$Q[x] \otimes_{A[x]} Q[x] \cong Q[x].$$

(ii) Sei A ein Hauptidealbereich, B ein Integritätsbereich und $\varphi\colon A \to B$ eine surjektive Abbildung. Dann ist entweder B ein Körper oder φ ein Isomorphismus.

(iii) Sei A ein Ring. Dann vertauscht die Summe von Idealen mit Schnitten.

(iv) Sei A ein Ring und $I \subseteq A$ ein Ideal sodass $\mathrm{Nil}(A/I) = 0$. Dann ist I ein Primideal.

(v) Der $\mathbf{Q}[x]$-Modul

$$\mathbf{Q}[x]/(x^2-1) \otimes_{\mathbf{Q}[x]} \mathbf{Q}[x]/(x^2+1)$$

ist trivial.

(vi) Sei A ein Ring, und $\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \subseteq A$ maximale Ideale mit $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{n} = \{0\}$. Dann ist A notwendigerweise artinsch.

(vii) Sei K ein Körper, und $p \in K[x]$ ein irreduzibles Polynom. Dann ist das Ideal $(p(x), p(y)) \subseteq K[x,y]$ ein Primideal.

(viii) Sei $\mathfrak{p} \subseteq A$ ein Primideal, so dass $|A/\mathfrak{p}| < \infty$. Dann ist $\mathfrak{p}$ bereits maximal.

(ix) Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring. Angenommen, $(a_1, \dots, a_n) \in A/\mathfrak{m}^2$ erzeugen $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ als $A/\mathfrak{m}$-Vektorraum. Dann gilt $\mathfrak{m} = (a_1, \dots, a_n)$.

(x) Sei A ein noetherscher Ring. Dann ist jeder Unterring $R \subseteq A$ bereits noethersch.

(xi) Sei $S \subseteq A$ ein multiplikatives System, und M ein noetherscher A-Modul. Dann ist $S^{-1}M$ ein noetherscher A-Modul.

(xii) Sei A ein Integritätsbereich, und $M \neq 0$ ein A-Modul. Angenommen, für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subseteq A$ ist der Modul $M_{\mathfrak{p}}$ torsionsfrei. Dann ist M bereits torsionsfrei.

(xiii) Die $\mathbf{Z}$-Moduln $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ und $\mathbf{R}$ sind isomorph.

(xiv) Sei A ein Ring sodass $A_{\mathfrak{m}}$ für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subseteq A$ ein Integritätsbereich ist. Dann ist A bereits ein Integritätsbereich.

(xv) Sei A ein Ring. Dann ist A noethersch $\Leftrightarrow A[x]$ ist noethersch.

(xvi) Sei $A = \mathbf{C}[t]$, und $M = A[x]/(x^2 - t)$. Dann ist M frei.

(xvii) Sei A ein Integritätsbereich, und M ein flacher A-Modul. Dann ist M torsionsfrei.

(xviii) Der Ring $K[\![x_1, \dots, x_n]\!]$ ist ein lokaler Ring.

(xix) Sei $\mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}_2 \supset \dots$ eine absteigende Kette von Primidealen. Dann ist $\bigcap_j \mathfrak{p}_j$ wieder ein Primideal.

(xx) Sei A ein noetherscher Ring, $f \in A$. Angenommen, $\mathfrak{p}$ ist ein minimales Primoberideal von (f). Dann gilt $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq 1$.