Prof. Dr. Jakob Stix
Ruth Wild

Wintersemester 2024/25

Algebraische Geometrie I
Blatt 0.5

Abgabe: keine

Definition. Sei X ein topologischer Raum.

(i) X heißt *quasi-kompakt*, falls es für jede offene Überdeckung $X = \bigcup_{i\in} U_i$ bereits eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ gibt sodass $X = \bigcup_{j\in J} U_j$ gilt.

(ii) X ist ein *Kolmogorov-Raum* oder ein *T_0-Raum* falls es für je zwei verschiedene Punkte $x, y \in X$ eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ gibt die genau einen der beiden Punkte enthält.

(iii) X heißt *irreduzible* falls $X \neq \emptyset$, und es gilt: für jede Zerlegung $X = Z_1 \cup Z_2$ mit Z_i abgeschlossen folgt bereits $X = Z_1$ oder $X = Z_2$. Eine *irreduzible Komponente* von X ist eine maximale irreduzible Teilmenge $Z \subseteq X$.

Aufgabe 1.
Sei X ein topologischer Raum. Zeige:

(i) Angenommen, X ist quasi-kompakt. Sei $\{Z_i\}_{i\in I}$ eine Menge an abgeschlossenen Teilmengen. Angenommen, für jede endliche Teilmenge $J \subseteq I$ gilt $\bigcap_{j\in J} Z_j \neq \emptyset$. Dann gilt bereits $\bigcap_{i\in I} Z_i \neq \emptyset$.

(ii) Angenommen, X ist nicht-leer, T_0 und quasi-kompakt. Dann gibt es einen abgeschlossenen Punkt $x \in X$. Wende dazu Zorn's Lemma auf die partiell georndente Menge

$$\mathcal{T} = \{Z \subseteq X \mid Z = \overline{\{x\}} \text{ für ein x∈X } \}$$

an.

Aufgabe 2.
Sei X ein topologischer Raum. Zeige:

(i) Eine irreduzible Teilmenge $Z \subseteq X$ muss nicht notwendigerweise abgeschlossen sein, aber der Abschluss einer irreduziblen Teilmenge ist irreduzible.

(ii) Angenommen, $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$, wobei jedes $X_i \subseteq X$ irreduzibel und abgeschlossen ist, und kein $X_i \notin \bigcup_{j\neq i} X_j$ für alle $1 \leq i \leq n$. Dann ist jedes X_i eine irreduzible Komponente von X, und jede irreduzible Komponente von X ist durch eines der X_i gegeben.

(iii) Angenommen, X ist noethersch. Dann hat X nur endlich viele irreduzible Komponenten.

Aufgabe 3.
Sei k ein Körper, und $Z = V(I) \subseteq \mathbb{A}_k^n$ eine algebraische Teilmenge. Sei

$$R := k[x_1, \dots, x_n]/I.$$

Zeige, dass äquivalent sind:

(i) Z ist zusammenhängend in der Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}_k^n$.

(ii) Der Ring R enthält keine nicht-trivialen idempotenten Elemente; d.h. für $e \in R$ mit $e^2 = e$ gilt bereits $e = 1$ oder $e = 0$.