Prof. Dr. Jakob Stix
Ruth Wild[1]

Sommersemester 2024

Kommutative Algebra
Blatt 9

Abgabe: 27. Juni

Aufgabe 1.
Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Die Länge von M ist

$$\ell_R(M) = \sup\{n \mid \exists 0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_n = M,\ M_i \text{ Submodul}\} \leq \infty.$$

(i) Sei A ein artinscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, B eine A-Algebra. Sei weiterhin N ein B-Modul, der flach als A-Modul ist und endliche Länge $\ell_B(N)$ als B-Modul hat. Zeige, dass dann $\ell_B(N) = \ell_A(A) \cdot \ell_B(N/\mathfrak{m}N)$ gilt.
(Tipp: Additivität von Länge auf kurz-exakten Sequenzen).

(ii) Sei A ein artinscher Ring. Zeige, dass $\mathrm{Jac}(A)$ ein nilpotentes Ideal ist.

Aufgabe 2.
Sei $\phi : R \to S$ eine Ringabbildung. Wir sagen das ϕ *treuflach* ist, falls S eine flache R-Algebra ist und für jeden R-Modul M gilt: $M \otimes_R S = 0 \Rightarrow M = 0$. Angenommen, ϕ ist treuflach.

(i) Zeige, dass für jedes Ideal $I \subseteq R$ gilt: $(I^e)^c = I$.

(ii) Zeige, dass falls S artinsch ist auch R artinsch ist. Gilt die analoge Aussage für noethersch?

Aufgabe 3.
Sei R ein Ring. Für $I \subseteq R$ ein Ideal sei $V(I)$ die Menge der Primideal die I enthalten. Zeige:

(i) $V(0) = \mathrm{Spec}(R)$, $V(R) = \emptyset$.

(ii) Für (I_i) eine beliebige Menge an Ideal gilt $V(\sum_i I_i) = \bigcap_i V(I_i)$.

(iii) Für I, J zwei Ideale gilt $V(IJ) = V(I) \cup V(J)$.

Sei $\phi : R \to S$ eine Ringabbildung, und $\phi^* : \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ die induzierte Abbildung. Zeige, dass dann $\phi^{*,-1}(V(I)) = V(I^e)$ gilt.

[1]Aufgaben verfügbar unter `https://ruthwild.gitlab.io/teaching`