Prof. Dr. Jakob Stix
Ruth Wild[1]

Sommersemester 2024

Kommutative Algebra
Blatt 8

Abgabe: 20. Juni

Aufgabe 1.
Sei k ein Körper, und $R \coloneqq \prod_{n\in\mathbb{Z}} k$. Zeige, dass R nicht noethersch ist, aber dass für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ die Lokalisierung $R_\mathfrak{p}$ noethersch ist. Zeige dazu:

(i) Jedes Ideal $I \subseteq R$ wird durch die in ihm enthaltenen idempotenten Elemente (d.h. $e \in I$ mit $e^2 = e$) erzeugt.

(ii) Jedes Primideal von R ist gleichzeitig maximal und minimal.

(iii) Jeder lokale Ring $R_\mathfrak{p}$ ist reduziert (d.h. enthält keine nicht-trivialen nilpotenten Elemente).

(iv) $R_\mathfrak{p}$ ist ein Körper, also insbesondere noethersch.

(v) R ist aber nicht noethersch.

Aufgabe 2 (Anwendungen des Nakayama-Lemma).
Zeige:

(i) Sei R ein Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Angenommen, es gibt ein Ideal $I \subseteq R$ mit $IM = M$. Dann gibt es ein $x \in I$ mit $xm = m$ für alle $m \in M$.

(ii) Sei R ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper K. Angenommen, $R \neq K$. Dann ist K kein endlich erzeugter R-Modul.

(iii) Sei R ein Ring und $I \subseteq R$ ein endlich erzeugtes Ideal. Dann ist I ein Hauptideal welches von einem idempotenten Element erzeugt wird genau dann wenn gilt $I^2 = I$.

(iv) Sei R ein lokaler Ring, und M, N zwei endlich erzeugte R-Moduln mit $M \otimes_R N = 0$. Zeige, dass dann bereits $M = 0$ oder $N = 0$ gilt.

Aufgabe 3 (Anwendungen des Schlangenlemmas).
Zeige:

(i) Sei R ein Ring und seien $f\colon M_1 \to M_2$, $g\colon M_2 \to M_3$ zwei R-lineare Abbildungen. Dann gibt es eine natürliche exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow \ker(f) \longrightarrow \ker(gf) \longrightarrow \ker(g) \longrightarrow \operatorname{coker}(f) \longrightarrow \operatorname{coker}(gf) \longrightarrow \operatorname{coker}(g) \longrightarrow 0$$

(ii) Sei R ein Ring und M ein endlich präsentierter R-Modul. Sei $f\colon R^n \to M$ eine beliebige Surjektion. Dann ist $\ker(f)$ ein endlich erzeugter R-Modul.

[1] Aufgaben verfügbar unter `https://ruthwild.gitlab.io/teaching`