Prof. Dr. Jakob Stix
Ruth Wild[1]

Sommersemester 2024

**Kommutative Algebra**
**Blatt 7**

Abgabe: 13. Juni

**Aufgabe 1.**
Sei $M$ ein $R$-Modul. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $M$ ist ein flacher $R$-Modul;

(ii) $M_{\mathfrak{p}}$ ist ein flacher $R_{\mathfrak{p}}$-Modul für alle $\mathfrak{p} \subseteq R$ prim;

(iii) $M_{\mathfrak{m}}$ ist ein flacher $R_{\mathfrak{m}}$-Modul für alle $\mathfrak{m} \subseteq R$ maximal.

**Aufgabe 2.**
Sei $\varphi : R \to S$ eine flache Ringabbildung, so dass die induzierte Abbildung $\mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ surjektiv ist. Sei $M$ ein $R$-Modul. Zeige, dass $M = 0$ gilt genau dann wenn $M \otimes_R S = 0$.

**Aufgabe 3** (4er-Lemma).
Sei

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm, wobei die Reihen exakte Komplexe sind. Angenommen, $\alpha$ ist surjektiv und $\delta$ ist injektiv. Zeige, dass dann gilt:

(i) $\gamma$ surjektiv impliziert $\beta$ surjektiv.

(ii) $\beta$ injektiv impliziert $\gamma$ injektiv.

**Aufgabe 4.**
Sei $R$ ein Ring und $M$ ein $R$-Modul.

(i) Zeige, dass $M$ flach ist genau dann wenn die natürliche Abbildung $M \otimes_R I \to IM$ für alle Ideale $I \subseteq R$ ein Isomorphismus ist. Gehe dazu wie folgt vor: Zeige die Flachheit zuerst für Injektionen $N' \hookrightarrow N$ mit $N$ frei von endlichem Rank (per Induktion), dann für beliebige freie Moduln $N$ und dann für beliebige $N$.

(ii) Schlussfolgere, dass für $R$ ein Hauptidealring $M$ flach ist genau dann wenn $M$ torsionsfrei ist. Gebe damit ein Beispiel von einem Modul über einem Hauptidealring an der flach aber nicht frei ist.

[1]Aufgaben verfügbar unter `https://ruthwild.gitlab.io/teaching`