Prof. Dr. Jakob Stix
Ruth Wild[1]

Sommersemester 2024

Kommutative Algebra
Blatt 6

Abgabe: 6. Juni

Aufgabe 1.
Sei K ein Körper und A eine endlich-erzeugte K-Algebra. Sei

$$\mathrm{Jac}(A) := \bigcap_{\mathfrak{m} \subseteq A \text{ maximal}} \mathfrak{m}$$

das Jacobson-Radikal von A. Zeige, dass dann $\mathrm{Jac}(A) = \mathrm{Nil}(A)$ gilt.

Aufgabe 2.
Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige folgende Aussagen über algebraische Mengen von $\mathbb{A}^n(K)$, d.h. Mengen der Form

$$V(\{f_i\}) = \{a \in K^n \mid f_i(a) = 0 \text{ für alle } i \in I\}, \text{mit } f_i \in K[x_1, \dots, x_n].$$

(i) Sowohl $\emptyset$ und $\mathbb{A}^n(K)$ sind algebraisch.

(ii) Seien $\{Z_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ algebraische Teilmengen, wobei I beliebig ist. Dann ist $\bigcap_{i \in I} Z_i$ ebenfalls algebraisch.

(iii) Seien $Z_1, \dots, Z_r \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ endlich viele algebraische Teilmengen. Dann ist $\bigcup_{1 \leq i \leq r} Z_i$ ebenfalls algebraisch.

Wie sehen die algebraischen Teilmengen von $\mathbb{A}^1(K)$ aus?

Aufgabe 3.
Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, und $Z \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ eine algebraische Teilmenge. Zeige, dass das Verschwindungsideal

$$I(Z) = \{f \in K[x_1, \dots, x_n] \mid f(a) = 0 \text{ für alle } a \in Z\} \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$$

ein Primideal ist genau dann wenn gilt: $Z = Z_1 \cup Z_2$ mit Z_1, Z_2 algebraisch $\Rightarrow Z_1 = Z$ oder $Z_2 = Z$.

Aufgabe 4.
Seien $f_1, \dots, f_k \in \mathbf{Z}[x_1, \dots, x_n]$ Polynome die keine gemeinsame komplexe Nullstelle haben, d.h.

$$\mathbb{A}^n(\mathbf{C}) \supseteq V(\{f_1, \dots, f_k\}) = \emptyset.$$

Zeige, dass es dann $g_1, \dots, g_k \in \mathbf{Z}[x_1, \dots, x_n]$ gibt mit $0 \neq \sum g_i f_i \in \mathbf{Z}$. Stimmt dies immernoch wenn nur angenommen wird dass die f_i keine gemeinsame Nullstelle in $\mathbf{R}^n$ haben?
Hinweis: An einer Stelle kann man Aufgabe 3 (ii) von Blatt 5 verwenden.

[1] Aufgaben verfügbar unter `https://ruthwild.gitlab.io/teaching`