Prof. Dr. Jakob Stix
Ruth Wild[1]

Sommersemester 2024

Kommutative Algebra
Blatt 5

Abgabe: 30. Mai

Aufgabe 1.
Sei R ein Ring, und $I, J \subseteq R$ Ideale. Zeige:

(i) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

(ii) $\sqrt{I} = 1$ genau dann wenn $I = \langle 1 \rangle$.

(iii) Angenommen, $I \neq \langle 1 \rangle$. Dann gilt $I = \sqrt{I}$ genau dann wenn I ein Schnitt von Primidealen ist.

Aufgabe 2.

(i) Sei R ein Hauptidealring der kein Körper ist. Angenommen, R hat genau ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$. Zeige, dass der Quotientenkörper $\mathrm{Frac}(R)$ eine endliche erzeutge R-Algebra ist.

(ii) Finde ein Beispiel von einem Ring R wie in (i).

(iii) Sei K eine endliche Körpererweiterung von $\mathbf{Q}$. Zeige, dass K keine endlich erzeugte $\mathbf{Z}$-Algebra ist.

Aufgabe 3 (Zariskis Lemma).

(i) Zeige, dass wenn L/K eine Körpererweiterung ist, sodass L als K-Algebra endlich erzeugt ist, dann folgt daraus bereits das L/K eine endliche Körpererweiterung ist.

(ii) Schlussfolgere, dass wenn K ein Körper ist, der als $\mathbf{Z}$-Algebra endlich erzeugt ist, K bereits ein endlicher Körper ist.

Aufgabe 4.
Beweise oder widerlege: Sei R ein Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal, und setze $J := \sqrt{I}$. Dann gibt es ein $n \in \mathbf{N}_{\geq 1}$, sodass $J^n \subseteq I$ gilt.

[1]Aufgaben verfügbar unter `https://ruthwild.gitlab.io/teaching`