Prof. Dr. Jakob Stix
Ruth Wild[1]

Sommersemester 2024

Kommutative Algebra
Blatt 4

Abgabe: 23. Mai

Aufgabe 1.

(i) Sei $\phi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus, und $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal. Setze $\kappa(\mathfrak{p}) := R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ (wobei $R_{\mathfrak{p}} := (R \setminus \mathfrak{p})^{-1}R$). Zeige, dass es eine Bijektion

$$\{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(S) \mid \phi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}\} \cong \operatorname{Spec}(\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_R S)$$

gibt. Schlussfolgere, dass folgende Äquivalenz gilt: $\mathfrak{p}$ ist im Bild der induzierten Abbildung $\phi^* : \operatorname{Spec}(S) \to \operatorname{Spec}(R) \Leftrightarrow \kappa(\mathfrak{p}) \otimes_R S \neq 0$.

(ii) Seien $\phi : R \to S$, $\phi' : R \to S'$ Ringhomomorphismen, und sei $\psi : R \to S \otimes_R S'$ gegeben durch $r \mapsto \phi(r) \otimes \phi'(r)$. Sein X, Y, Z, T die jeweiligen Spektra von $R, S, S', S \otimes_R S'$, und schreibe $(-)^*$ für die jeweils auf Spektren induzierten Abbildungen. Zeige, dass dann gilt:

$$\psi^*(T) = \phi^*(Y) \cap \phi'^{,*}(Z)$$

Aufgabe 2.

(i) Sei L/K eine Körpererweiterung, so dass $\dim_K L = \infty$. Zeige, dass der Unterring

$$\{f \in L[x] \mid f(0) \in K\} \subseteq L[x]$$

nicht noethersch ist.

(ii) Sei k ein Körper, und sei $R \subseteq k[x, y]$ der von $\{xy^i \mid i \geq 0\}$ erzeugte Unterring. Zeige, dass R nicht noethersch ist.

Aufgabe 3.

Ein R-Modul M heißt *endlich präsentiert* falls es $n, m \in \mathbf{N}$ und eine lineare Abbildung $f : R^m \to R^n$ gibt, so dass

$$M \cong \operatorname{coker}(R^m \xrightarrow{f} R^n)$$

gilt. Zeige, dass für R noethersch jeder endlich erzeugte R-Modul endlich präsentiert ist. Zeige dann, das für R beliebig jeder endlich präsentierter Modul als Basiswechsel

$$M \cong N \otimes_{R'} R\,,$$

mit N endlich erzeugt und R' noethersch geschrieben werden kann.

[1] Aufgaben verfügbar unter `https://ruthwild.gitlab.io/teaching`

Aufgabe 4.
Sei R ein noetherscher Ring, und $R[\![x]\!]$ der Potenzreihenring über R. Zeige, dass $R[\![x]\!]$ ebenfalls noethersch ist.