Prof. Dr. Jakob Stix
Ruth Wild[1]

Sommersemester 2024

Kommutative Algebra
Blatt 3

Abgabe: 16. Mai

Aufgabe 1.
Sei $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, und seien $\mathfrak{a} \subseteq A$ sowie $\mathfrak{b} \subseteq B$ Ideale. Wir wissen bereits dass $\mathfrak{b}^c := f^{-1}(\mathfrak{b}) \subseteq A$ immer ein Ideal, und dass falls $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist auch $\mathfrak{p}^c$ ein Primideal. Zeige zuerst an geeigneten Beispielen:

- Für $\mathfrak{a} \subseteq A$ muss $f(\mathfrak{a}) \subseteq B$ kein Ideal sein, und für $\mathfrak{p} \subseteq A$ ein Primideal muss auch $f(\mathfrak{p}) \subseteq B$ kein Primideal sein,
- Für $\mathfrak{m} \subseteq B$ maximal muss $\mathfrak{m}^c \subseteq A$ nicht maximal sein.

Setze nun für $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal $\mathfrak{a}^e := \langle f(\mathfrak{a}) \rangle \subseteq B$, also dass von $f(\mathfrak{a})$ in B erzeugte Ideal. Zeige, dass gilt:

(i) $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}^{ec}$, $\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{b}^{ce}$, aber beide Inklusionen können strikt sein,

(ii) $\mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}^{ece}$, $\mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}^{cec}$,

(iii) Falls $\mathfrak{p} \subseteq A$ prim ist, muss $\mathfrak{p}^e \subseteq B$ nicht notwendigerweise prim sein,

(iv) Für die Inklusion $A \hookrightarrow A[x]$ gilt $\mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}[x] := \{\sum a_i x^i \mid a_i \in \mathfrak{a}\}$.

Aufgabe 2.
Sei R ein Ring, und $R[x]$ der Polynomring über R. Sei $0 \neq f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in R[x]$. Zeige:

(i) f ist eine Einheit $\Leftrightarrow$ a_0 ist eine Einheit und a_i sind nilpotent für $i \geq 1$.

(ii) f ist nilpotent $\Leftrightarrow$ alle a_i sind nilpotent.

(iii) f ist ein Nullteiler $\Leftrightarrow$ es gibt ein $a \in R \setminus \{0\}$ mit $af = 0$.

Aufgabe 3.

(i) Sei R ein Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal. Zeige, dass es einen kanonischen Isomorphismus

$$(R/I)[x] \xrightarrow{\sim} R[x]/I^e$$

gibt.

[1]Aufgaben verfügbar unter `https://ruthwild.gitlab.io/teaching`

(ii) Beschreibe die Primideale in $\mathbf{Z}[x]/\langle x^2 - 4\rangle$. (Anmerkung: Diese Aufgabe kann vielleicht etwas aufwendiger sein. In dem Fall kann es auch sinnvoll sein, die Beschreibung wie in [StacksProject] zu verstehen, und dann in eigenen Worten wiederzugeben.)

Aufgabe 4.
Sei R ein Ring und $\operatorname{Nil}(R)$ das Nilradikal von R. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) R hat genau ein Primideal.

(ii) Jedes Element in R ist entweder eine Einheit oder nilpotent.

(iii) Der Quotient $R/\operatorname{Nil}(R)$ ist ein Körper.

References

[StacksProject] *The Stacks Project.*
URL: `http://stacks.math.columbia.edu/tag/00EX`.