Prof. Dr. Jakob Stix
Ruth Wild[1]

Sommersemester 2024

Kommutative Algebra
Blatt 2

Abgabe: 9. Mai

Aufgabe 1.
Zeige:

(i) Sei $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $\mathfrak{p} \subseteq B$ ein Primideal. Dann ist $f^{-1}(\mathfrak{p}) \subseteq A$ ein Primideal.

(ii) Seien $m, n \in \mathbf{Z}$. Dann gilt

$$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}/\operatorname{ggT}(n,m)\mathbf{Z}.$$

(iii) Sei A ein Ring, $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge und M ein freier A-Modul. Dann ist $S^{-1}M$ ein freier $S^{-1}A$-Modul.

(iv) Sei M eine abelsche Gruppe in der jedes Element endliche Ordnung hat (i.e. es gibt für jedes $a \in M$ in $n \in \mathbf{N}$ mit $na = 0$). Zeige, dass dann $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} M = 0$. Wie sieht $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ aus?

(v) Sei A ein Ring, $I \subseteq A$ ein Ideal und M ein A-Modul. Zeige, dass es einen kanonischen Isomorphismus von A-Moduln $A/I \otimes_A M \xrightarrow{\sim} M/IM$ gibt. Zeige, dass die Aussage $I \otimes_A M \cong IM$ im Allgemeinen falsch ist.

Aufgabe 2.
Sei A ein Ring und $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge. Zeige, dass für ein Ideal $I \subseteq A$ die Teilmenge

$$I(S^{-1}A) := \{\frac{x}{s} \mid x \in I, s \in S\} \subseteq S^{-1}A$$

wieder ein Ideal ist. Zeige dann, dass die Zuordnung

$$\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} \to \operatorname{Spec}(S^{-1}A),\ \mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}(S^{-1}A)$$

eine inklusionserhaltende Bijektion definiert, deren Umkehrabbildung gegeben ist durch $\mathfrak{q} \mapsto \eta^{-1}(\mathfrak{q})$, für $\eta : A \to S^{-1}A$ die kanonische Abbildung. Benutze dies, um $\operatorname{Spec}(A_{\mathfrak{p}})$ für $\mathfrak{p} \subseteq A$ ein Primideal zu beschreiben.

[1] Aufgaben verfügbar unter `https://ruthwild.gitlab.io/teaching`

Aufgabe 3.
Sei A ein Ring und $a \in A$ ein Element.

(i) Zeige, dass die Menge $S \coloneqq \{a^n\}_{n \in \mathbf{N}}$ multiplikativ abgeschlossen ist.

(ii) Finde eine (sinnvolle) notwendige und hinreichende Bedingung dass $S^{-1}A = 0$ gilt.

(iii) Beschreibe die Primideale in $S^{-1}A$.

Aufgabe 4.
Sei k ein Körper, und betrachte die Ringabbildung

$$k[x] \hookrightarrow k[x, y] \twoheadrightarrow k[x, y]/(xy).$$

Zeige, dass die $k[x]$-lineare Abbildung

$$k[x] \to k[x], \; f \mapsto x \cdot f$$

injektiv ist, aber die induzierte Abbildung

$$k[x] \otimes_{k[x]} (k[x, y]/(xy)) \to k[x] \otimes_{k[x]} (k[x, y]/(xy))$$

nichttrivialen Kern hat.