Prof. Dr. Jakob Stix
Ruth Wild[1]

Sommersemester 2024

Kommutative Algebra
Blatt 12

Abgabe: keine.

Aufgabe 1.
Welche der folgenden Ringe sind diskrete Bewertungsringe?

$$\mathbf{Z};\ k[[x]];\ k[x]_x;\ k[x^2, x^3] \subseteq k[x];\ \mathbf{F}_3[x, y]/x^2 - y.$$

Aufgabe 2.
Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Integritätsbereich der kein Körper ist. Angenommen, $\mathfrak{m}$ ist ein Hauptideal und $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i = 0$. Zeige, dass dann R ein diskreter Bewertungsring ist.

Aufgabe 3.
Sei $\varphi : R \to S$ eine Ringabbildung. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) S ist ein endlich-erzeugter R-Modul.

(ii) S ist ganz über R und eine endlich erzeugte R-Algebra.

Aufgabe 4.
Sei $\varphi : R \to S$ eine Ringabbildung die ganz und injektiv ist. Angenommen, für $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \in \operatorname{Spec}(S)$ gilt $\mathfrak{q}_1 \cap R \subseteq \mathfrak{q}_2 \cap R$ oder $\mathfrak{q}_2 \cap R \subseteq \mathfrak{q}_1 \cap R$. Zeige, dass dann bereits $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$ gilt.

[1] Aufgaben verfügbar unter `https://ruthwild.gitlab.io/teaching`