Prof. Dr. Jakob Stix
Ruth Wild[1]

Sommersemester 2024

Kommutative Algebra
Blatt 10

Abgabe: 4. Juli

Aufgabe 1.
Sei $\varphi : R \to S$ eine Ringabbildung, sodass S als R-Modul endlich erzeugt ist. Sei $\varphi^* : \operatorname{Spec}(S) \to \operatorname{Spec}(R)$ die induzierte Abbildung. Zeige, dass für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subseteq R$ das Urbild $\varphi^{*,-1}(\mathfrak{p})$ eine endliche Menge ist.

Aufgabe 2.
Sei R ein Ring, und $\operatorname{Nil}(R)$ das Nilradikal. Zeige, dass die Projektion $R \to R/\operatorname{Nil}(R)$ eine Bijektion auf Spektra induziert. Beschreibe dann $\operatorname{Spec}(k[x,y]/(x^2,xy))$, und zeige weiterhin das y ein Nullteiler ist der in keinem minimalen Primideal enthalten ist.

Aufgabe 3 ("Going-down"-Lemma für flache Ringabbildungen).
Sei $\varphi : R \to S$ eine flache Ringabbildung, und $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}'$ Primideale in R. Angenommen, es gibt ein Primideal $\mathfrak{q} \subseteq S$ mit $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$. Zeige, dass es dann ein Primideal $\mathfrak{q}' \subseteq S$ gibt mit $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}') = \mathfrak{q}'$, und dass $\mathfrak{q}'$ als ein minimales Primoberideal von $\mathfrak{p}^e$ gewählt werden kann.

Aufgabe 4.
Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, und setze $\kappa := R/\mathfrak{m}$.

(i) Zeige, dass
$$\dim_\kappa \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \min\{\text{Anzahl an Erzeugern von } \mathfrak{m}\}$$
gilt.

Aus der Vorlesung ist bekannt dass
$$\operatorname{ht}(\mathfrak{m}) \leq \min\{\text{Anzahl an Erzeugern von } \mathfrak{m}\}$$
gilt; R heiß *regulär* falls hier Gleichheit gilt. Im Folgenden nehmen wir nun an dass R regulär ist.

(ii) Zeige: Sei $f \in R$ mit $f \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$. Dann ist $\overline{R} := R/\langle f \rangle$ wieder lokal mit maximalem Ideal $\overline{\mathfrak{m}}$, und weiterhin ist $\overline{R}$ regulär mit $\operatorname{ht}(\overline{\mathfrak{m}}) = \operatorname{ht}(\mathfrak{m}) - 1$.

(iii) Zeige damit induktiv und unter Verwendung von Primvermeidung: Ist $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring der regulär ist, dann ist R bereits ein Integritätsbereich.

[1] Aufgaben verfügbar unter `https://ruthwild.gitlab.io/teaching`