

Kommutative Algebra
Blatt 1

Abgabe: 02. Mai

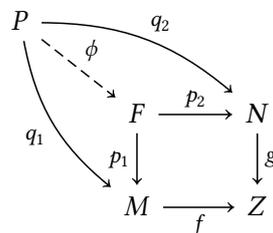
Aufgabe 1.

Sei R ein Ring, M ein R -Modul und $N \subseteq M$ ein Untermodul.

- (i) Angenommen, M ist endlich erzeugt. Zeige, dass dann auch M/N endlich erzeugt ist.
- (ii) Angenommen, N und M/N sind endlich erzeugt. Zeige, dass dann auch M endlich erzeugt ist.
- (iii) Finde (mit Beweis) ein Beispiel von einem endlich erzeugten R -Modul M und einem Untermodul $N \subseteq M$, sodass N nicht endlich erzeugt ist.

Aufgabe 2.

Seien M, N, Z drei R -Moduln und $f : M \rightarrow Z$, $g : N \rightarrow Z$ zwei lineare Abbildungen. Zeige, dass es einen R -Modul F sowie lineare Abbildungen $p_1 : F \rightarrow M$ und $p_2 : F \rightarrow N$ mit folgender universellen Eigenschaft gibt: (*) Angenommen, P ist ein R -Moduln, mit linearen Abbildungen $q_1 : P \rightarrow M$ und $q_2 : P \rightarrow N$ sodass $f q_1 = g q_2$ gilt. Dann gibt es eine eindeutige lineare Abbildung $\phi : P \rightarrow F$, sodass folgendes Diagramm kommutiert:



Was bedeutet dies im Fall $Z = 0$? Sei nun $U : R\text{-Mod} \rightarrow \text{Set}$ der Vergissfunktork. Argumentiere, warum die Menge $U(F)$ mit den Abbildungen $U(p_1), U(p_2)$ die analoge universelle Eigenschaft zu (*) in Set erfüllt.

Aufgabe 3.

Sei R ein Ring und M, N zwei R -Moduln. In der Vorlesungen haben wir gesehen, dass die Menge der R -linearen Abbildungen $\text{Hom}_R(M, N)$ auf natürliche Weise ein R -Modul ist. Angenommen, $M = R/I$ für ein Ideal $I \subseteq R$. Zeige, dass es dann eine Bijektion

$$\text{Hom}_R(M, N) \cong \{n \in N \mid \forall a \in I, an = 0\}$$

¹Aufgaben verfügbar unter <https://ruthwild.gitlab.io/teaching>

gibt. Ist das eine Isomorphismus von R -Moduln? Was bedeutet diese Aussage in dem Fall $I = \{0\}$?

Aufgabe 4.

- (i) Sei \mathcal{C} eine Kategorie, und $A \in \mathcal{C}$ ein Objekt. Zeige, dass durch die Zuordnung

$$F_A : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}, B \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$$

ein Funktor definiert werden kann: Es muss für alle $B_1, B_2 \in \mathcal{C}$ eine Abbildung

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(B_1, B_2) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Set}}(F_A(B_1), F_A(B_2)), f \mapsto F_A(f)$$

definiert werden, und gezeigt werden dass die so definierte Zuordnung tatsächlich einen Funktor definiert.

- (ii) In dem Fall $\mathcal{C} = R\text{-Mod}$ faktorisiert dieser Funktor über den Vergissfunktor $U : R\text{-Mod} \rightarrow \text{Set}$, das heißt wir erhalten für jeden R -Modul M einen Funktor

$$F_M : R\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}, N \mapsto \text{Hom}_R(M, N).$$

Zeige, dass für alle $N_1, N_2 \in R\text{-Mod}$ die Abbildung

$$\text{Hom}_R(N_1, N_2) \rightarrow \text{Hom}_R(F_M(N_1), F_M(N_2)), f \mapsto F_M(f)$$

eine R -lineare Abbildung ist