Prof. Dr. Jakob Stix
Ruth Wild[1]

Sommersemester 2024

Kommutative Algebra
Blatt 1

Abgabe: 02. Mai

Aufgabe 1.
Sei R ein Ring, M ein R-Modul und $N \subseteq M$ ein Untermodul.

(i) Angenommen, M ist endlich erzeugt. Zeige, dass dann auch M/N endlich erzeugt ist.

(ii) Angenommen, N und M/N sind endlich erzeugt. Zeige, dass dann auch M endlich erzeugt ist.

(iii) Finde (mit Beweis) ein Beispiel von einem endlich erzeugten R-Modul M und einem Untermodul $N \subseteq M$, sodass N nicht endlich erzeugt ist.

Aufgabe 2.
Seien M, N, Z drei R-Moduln und $f : M \to Z$, $g : N \to Z$ zwei lineare Abbildungen. Zeige, dass es einen R-Modul F sowie lineare Abbildungen $p_1 : F \to M$ und $p_2 : F \to N$ mit folgender universellen Eigenschaft gibt: $(*)$ *Angenommen, P ist ein R-Moduln, mit linearen Abbildungen $q_1 : P \to M$ und $q_2 : P \to N$ sodass $fq_1 = gq_2$ gilt. Dann gibt es eine eindeutige lineare Abbildung $\phi : P \to F$, sodass folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[drr, bend left, "q_2"] \arrow[dr, dashed, "\phi"] \arrow[ddr, bend right, "q_1"'] & & \\
& F \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & N \arrow[d, "g"] \\
& M \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Was bedeutet dies im Fall $Z = 0$? Sei nun $U : R\text{-}\mathcal{M}\mathrm{od} \to \mathcal{S}\mathrm{et}$ der Vergissfunktor. Argumentiere, warum die Menge $U(F)$ mit den Abbildungen $U(p_1), U(p_2)$ die analoge universelle Eigenschaft zu $(*)$ in $\mathcal{S}\mathrm{et}$ erfüllt.

Aufgabe 3.
Sei R ein Ring und M, N zwei R-Moduln. In der Vorlesungen haben wir gesehen, dass die Menge der R-linearen Abbildungen $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ auf natürliche Weise ein R-Modul ist. Angenommen, $M = R/I$ für ein Ideal $I \subseteq R$. Zeige, dass es dann eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) \cong \{n \in N \mid \forall a \in I,\ an = 0\}$$

[1] Aufgaben verfügbar unter `https://ruthwild.gitlab.io/teaching`

gibt. Ist das eine Isomorphismus von R-Moduln? Was bedeutet diese Aussage in dem Fall $I = \{0\}$?

Aufgabe 4.

(i) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, und $A \in \mathcal{C}$ ein Objekt. Zeige, dass durch die Zuordnung

$$F_A : \mathcal{C} \to \mathcal{S}\mathrm{et}, \; B \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$$

ein Funktor definiert werden kann: Es muss für alle $B_1, B_2 \in \mathcal{C}$ eine Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B_1, B_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathrm{et}}(F_A(B_1), F_A(B_2)), \; f \mapsto F_A(f)$$

definiert werden, und gezeigt werden dass die so definierte Zuordnung tatsächlich einen Funktor definiert.

(ii) In dem Fall $\mathcal{C} = R\text{-}\mathcal{M}\mathrm{od}$ faktorisiert dieser Funktor über den Vergissfunktor $U : R\text{-}\mathcal{M}\mathrm{od} \to \mathcal{S}\mathrm{et}$, dass heißt wir erhalten für jeden R-Modul M einen Funktor

$$F_M : R\text{-}\mathcal{M}\mathrm{od} \to R\text{-}\mathcal{M}\mathrm{od}, \; N \mapsto \mathrm{Hom}_R(M, N).$$

Zeige, dass für alle $N_1, N_2 \in R\text{-}\mathcal{M}\mathrm{od}$ die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_R(N_1, N_2) \to \mathrm{Hom}_R(F_M(N_1), F_M(N_2)), \; f \mapsto F_M(f)$$

eine R-lineare Abbildung ist