Prof. Dr. Jakob Stix
Ruth Wild[1]

Sommersemester 2024

Kommutative Algebra
Blatt 1.5

Abgabe: keine (besprochen am 30. April 2024)

Aufgabe 1.
Zwei Ideale $I, J \subseteq R$ in einem Ring heißen *coprim* falls $I + J = R$ gilt.

(i) Zeige, dass wenn I und J coprim sind, dass dann auch I^l und J^k coprim sind, für alle $l, k \in \mathbf{N}$.

(ii) Zeige, dass für coprime Ideale I, J äquivalent sind:
   - Das Ideal IJ ist eine Quadrat (d.h. es gibt ein Ideal $\mathfrak{c}$ mit $IJ = \mathfrak{c}^2$).
   - Die Ideale I und J sind Quadrate (d.h. es gibt Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sodass $I = \mathfrak{a}^2$ sowie $J = \mathfrak{b}^2$ gilt).

Aufgabe 2.
Sei $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Zeige, dass der Einschränkungsfunktor $S\text{-}\mathcal{M}\mathrm{od} \to R\text{-}\mathcal{M}\mathrm{od}$ ein rechtsadjungierter Funktor ist, mit dem Linksadjungierten gegeben durch

$$R\text{-}\mathcal{M}\mathrm{od} \to S\text{-}\mathcal{M}\mathrm{od}, \ M \mapsto M \otimes_R S,$$

wobei die S-Modulstruktur auf $M \otimes_R S$ gegeben ist durch $s(m \otimes s') := m \otimes (ss')$.

Seien nun $R = K$ und $S = L$ zwei Körper, und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Was ist die Dimension des L-Vektorraums $V \otimes_K L$?

Aufgabe 3.
Sei R ein Ring, und A, B zwei R-Algebren. Zeige, dass das Tensorprodukt $A \otimes_R B$ wieder eine natürliche R-Algebrastruktur hat. Beschreibe das Tensorprodukt explizit in dem Fall $A = B = R[t]$.

[1] Aufgaben verfügbar unter `https://ruthwild.gitlab.io/teaching`