Prof. Dr. Jakob Stix
Ruth Wild[1]

Sommersemester 2024

Kommutative Algebra
Blatt 0

Abgabe: keine (Präsenzblatt).

Aufgabe 1 (Universelle Eigenschaften des Quotienten).
Sei M eine abelsche Gruppe, und $N \subseteq M$ eine Untergruppe. Wiederhole, was die universelle Eigenschaft des Quotienten M/N ist.

Aufgabe 2.

(i) Zeige: Sei M eine abelsche Gruppe. Dann gibt es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $F \twoheadrightarrow M$, sodass F eine freie abelsche Gruppe ist.

(ii) Angenommen, F kann in (i) endlich erzeugt gewählt werden (d.h. es gibt einen Isomorphismus $F \cong \mathbf{Z}^n$ für ein $n \in \mathbf{N}$). Wie kann man das benutzen, um M besser zu beschreiben?

Aufgabe 3 (Chinesischer Restsatz).
Sei R ein Ring, und seien $I_1, \dots, I_n$ Ideale in R. Betrachte den Ringhomomorphismus

$$\phi : R \to \prod_{i=1}^{n} (R/I_i),$$

gegeben durch $x \mapsto (x + I_1, \dots, x + I_n)$. Zeige:

(i) Sind I_i und I_j coprim für alle paarweise verschiedene $i \neq j$, dann gilt $\prod I_i = \bigcap I_i$.

(ii) Die Abbildung ϕ ist injektiv $\Leftrightarrow$ $\bigcap I_i = \{0\}$.

(iii) Die Abbildung ϕ ist surjektiv $\Leftrightarrow$ I_i und I_j sind coprim für alle paarweise verschiedene $i \neq j$.

Zusatzaufgabe.
Sei X eine Menge, und $r \subseteq X \times X$ eine Teilmenge.

(i) Zeige: Die Menge

$$r' := \bigcap_{\substack{r \subseteq e \subseteq X \times X \\ e \text{ ist eine Äquivalenzrelation}}} e \subseteq X \times X$$

ist eine Äquivalenzrelation.

(ii) Finde eine explizite Beschreibung der Äquivalenzrelation r' via r.

[1] Aufgaben verfügbar unter `https://ruthwild.gitlab.io/teaching`