Prof. Dr. Jakob Stix
Ruth Wild[1]

Sommersemester 2024

Kommutative Algebra
Blatt 0.5

Abgabe: keine (Präsenzblatt, besprochen 23. April).

Aufgabe 1.
Sei k ein Körper, und $k[x]$ der Polynomring in einer Variablen.

(i) Sein $a \in k$. Zeige dass es einen Ringisomrphismus $k[x]/(x-a) \xrightarrow{\sim} k$ gibt, wobei $(x-a) \subseteq k[x]$ das von $x-a$ erzeugte Ideal bezeichnet.

(ii) Sei $f \in k[x]$ von Grad d. Zeige, dass $k[x]/(f)$ ein d-dimensionaler k-Vektorraum ist.

(iii) Sei $a := (a_1, \dots, a_n) \in k^n$. Zeige, dass die Auswertungsabbildung

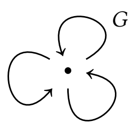
$$\varphi_a : \ k[x_1, \dots, x_n] \to k, \ f \mapsto f(a_1, \dots, a_n)$$

ein surjektiver Ringhomomorphismus ist. Gebe Erzeuger des Kerns von φ_a an, und zeige dass $\ker(\varphi_a) \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ ein maximales Ideal ist.

Aufgabe 2.
Sei G eine Gruppe. Zeige, dass $\mathcal{C} = BG$ eine Kategorie definiert, wobei

- $\mathcal{C}$ ein Objekt, bezeichnet als $\bullet$, hat;
- die Morphismen gegeben sind durch $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, \bullet) = G$, wobei wir definieren $g \circ h := gh$ (Multiplikation in G).

Man kann sich die Kategorie $\mathcal{C}$ bildlich wie folgt vorstellen:



Sei nun H eine weitere Gruppe, und setze $\mathcal{D} := BH$. Beschreibe die Menge der Funktoren $F : \ \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.

[1] Aufgaben verfügbar unter `https://ruthwild.gitlab.io/teaching`

Aufgabe 3.

(i) Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, und $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Zeige, dass wenn $f : x \to y$ ein Isomorphismus in $\mathcal{C}$ ist, auch $F(f) : F(x) \to F(y)$ ein Isomorphismus ist.

(ii) Zeige, dass die Umkehrung im Allgemeinen falsch ist, i.e. finde zwei Kategorien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$, einen Funktor $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ sowie einen Morphismus f in $\mathcal{C}$ so dass $G(f)$ ein Isomorphimus in $\mathcal{D}$ ist, aber f kein Isomorphismus in $\mathcal{C}$.

Aufgabe 4.
Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Wir machen folgende Definition:

Definition 0.1. Ein Morphismus f in $\mathcal{C}$ ist ein *Monomorphismus* falls für alle (verknüpfbaren) Morphismen g, g' gilt: $fg = fg' \Rightarrow g = g'$. Dual ist f ein *Epimorphismus* falls für alle (verknüpfbaren) Morphismen g, g' gilt: $gf = g'f \Rightarrow g = g'$.

Zeige:

(i) In der Kategorie $\mathcal{A}\mathrm{b}$ von abelschen Gruppen sind für einen Morphismus $f : M \to N$ äquivalent:
   (a) f ist ein Monomorphismus.
   (b) $\ker(f)$ ist trivial.
   (c) f ist injektiv.

(ii) In der Kategorie $\mathcal{A}\mathrm{b}$ von abelschen Gruppen sind für einen Morphismus $f : M \to N$ äquivalent:
   (a) f ist ein Epimorphismus.
   (b) $\mathrm{coker}(f) := N/\operatorname{im}(f)$ ist trivial.
   (c) f ist surjekiv.

(iii) Zeige, dass die analoge Aussage zu (i) auch in der Kategorie $\mathcal{R}\mathrm{ing}$ der Ringe gilt.[2]

(iv) Zeige, dass die analoge Aussage zu (ii) in der Kategorie $\mathcal{R}\mathrm{ing}$ *nicht* gilt, über ein Gegenbeispiel für die Implikation (a) $\Rightarrow$ (c).

Weitere offene Aufgaben aus der Übung

Aufgabe 5.
Betrachte die Zuordnung die einer Gruppe G ihre Abelisierung $G^{\mathrm{ab}} := G/[G,G]$ zuordnet. Zeige, dass dadurch ein Funktor $\mathcal{G}\mathrm{rp} \to \mathcal{A}\mathrm{b}$ definiert werden kann.

Aufgabe 6.
Was ist die universelle Eigenschaft der freien Gruppe $F(M)$ auf einer Menge M?

[2]Wobei für Ringabbildungen $f : R \to S$ weiterhin $\ker(f) := \{x \in R \mid f(x) = 0\}$ setzen — beachte, dass dies kein Ring ist! (Für unsere Zwecke ist das irrelevant, es gibt aber eine kategorielle Definition von “Kern” über eine universelle Eigenschaft, und diese wird für “Kerne von Ringabbildungen” wie wir sie definiert haben nicht erfüllt.)